№ 664—665.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА.

Второй серіи

VI-го семестра № 4—5.



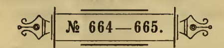
ОДЕССА.
Типографія „Техникъ"—Екатерининская, 58.
1916.

Второй серіи VI-го семестра № 4—5.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.



№ 664—665.

Введеніе въ ученіе объ основаніяхъ геометріи.

Прив.-доц. В. Ф. Кагана.

(*Продолженіе* *).

§ 4. Понятіе о величинѣ.

1. Постулатами сравненія a) — c) и e) — i), а также вытекающими изъ нихъ предложеніями I — VIII, исчерпываются всѣ тѣ свойства понятій „равно“, „больше“ и „меньше“, которыя въ математикѣ съ ними связываются и находятъ себѣ примѣненіе независимо отъ индивидуальныхъ свойствъ того комплекса, къ элементамъ коего мы ихъ въ различныхъ частныхъ случаяхъ примѣняемъ; встрѣчаются еще, правда, незначительныя видоизмѣненія тѣхъ же предложеній, осуществляемыя при помощи такъ называемаго преобразованія предложеній; но это лишь иное словесное выраженіе тѣхъ же истинъ. Чтобы убѣдиться въ томъ, что это дѣйствительно такъ, т.-е. что указанными предложеніями исчерпываются всѣ общія свойства разсматриваемыхъ понятій, необходимо прослѣдить научное развитіе

*) См. „Вѣстникъ“, № 663.

ариѳметики и геометріи и удостовѣриться въ томъ, что ни на какія иныя общія свойства этихъ понятій не приходится ссылаться. По отношенію къ геометріи читатель будетъ имѣть возможность провѣрить это во второй части настоящаго труда; относительно же ариѳметики здѣсь читателю придется принять это на вѣру.

Всѣ свойства понятій „равно“, „больше“ и „меньше“ распадаются на двѣ категоріи. Свойства первой категоріи выражаются системой восьми предложеній, изъ которыхъ ни одно не представляетъ собой слѣдствія семи остальныхъ; мы уже указали на это выше и докажемъ это въ § 8; эти предложенія мы назвали постулатами сравненія. Вторую категорію составляютъ предложенія, представляющія собой слѣдствія изъ постулатовъ сравненія; ихъ мы назвали теоремами.

2. Кто вникъ въ выводы этихъ теоремъ, тотъ уяснилъ себѣ, конечно, что они опираются не на тѣ или иныя наглядныя представленія, которыя мы обычно соединяемъ съ понятіями „равно“, „больше“ или „меньше“, а на присущія имъ свойства дизъюнктивности, транзитивности, обратимости и возвратности. Мы пользовались этими понятіями лишь постольку, поскольку они характеризуются этими свойствами, точнѣе, поскольку они удовлетворяютъ тѣмъ требованіямъ, которыя выражены въ постулатахъ сравненія. Мы можемъ стать поэтому, какъ это и дѣлаетъ прив.-доц. С. О. Шатуновскій въ упомянутой работѣ, на болѣе общую точку зрѣнія.

Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторый комплексъ, элементы котораго могутъ быть связаны одни съ другими различнаго рода соотношеніями. Нашъ комплексъ можетъ состоять, напримѣръ, изъ людей, и соотношеніе, которымъ лицо A связано съ лицомъ B, можетъ заключаться въ томъ, что A есть предокъ, или братъ, или потомокъ лица B и т. п. Комплексъ можетъ состоять изъ треугольниковъ, и соотношенія могутъ заключаться въ томъ, что треугольникъ A конгрузнтенъ треугольнику B, или въ томъ, что треугольникъ A подобенъ треугольнику B, или въ томъ, что треугольникъ A можетъ быть расположенъ внутри или внѣ треугольника B. Совершенно ясно, что въ одномъ и томъ же комплексѣ элементы могутъ находиться въ различныхъ соотношеніяхъ одинъ къ другому, или, вѣрнѣе, что мы можемъ устанавливать, мы можемъ изучать различныя соотношенія.

Итакъ, положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторый комплексъ элементовъ, и что мы изучаемъ въ этомъ комплексѣ три категоріи соотношеній, которыя мы будемъ обозначать соотвѣтственно черезъ α, β и γ.

Положимъ, далѣе, что эти соотношенія удовлетворяютъ слѣдующимъ требованіямъ, которыя мы будемъ, впрочемъ, называть латинскимъ словомъ того же значенія — постулатами.

Постулаты.

I. Каждый элементъ комплекса A стоитъ къ любому элементу (другому или тому же самому) этого

комплекса, по крайней мѣрѣ, въ одномъ изъ соотношеній α, β, γ; иначе говоря, коль скоро A и B суть элементы комплекса, всегда имѣетъ мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ соотношеній: $A\alpha B$, $A\beta B$ или $A\gamma B$.

II. Соотношеніе α исключаетъ соотношеніе β. Это значитъ, что, если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A\alpha B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A\beta B$.

III. Соотношеніе α исключаетъ соотношеніе γ.

IV. Соотношеніе α транзитивно. Это значитъ, что, если A, B и C суть элементы нашего комплекса и имѣютъ мѣсто соотношенія $A\alpha B$ и $B\alpha C$, то имѣетъ также мѣсто соотношеніе $A\alpha C$.

V. Соотношеніе β транзитивно.

VI. Соотношеніе γ транзитивно.

VII. Соотношеніе α обратимо. Это значитъ, что, если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A\alpha B$, то имѣетъ также мѣсто соотношеніе $B\alpha A$.

VIII. Наконецъ, α есть соотношеніе возвратное, т.-е. каждый элементъ комплекса A всегда стоитъ къ себѣ самому въ соотношеніи α ($A\alpha A$).

Если соотношенія α, β, γ этимъ требованіямъ удовлетворяютъ, то имѣютъ мѣсто слѣдующія теоремы.

Теоремы.

Теорема I, 1. Соотношеніе $A\beta B$ исключаетъ соотношеніе $B\beta A$; т.-е. если имѣетъ мѣсто одно изъ этихъ соотношеній, то не имѣетъ мѣста другое.

Теорема I, 2. Соотношеніе $A\gamma B$ исключаетъ соотношеніе $B\gamma A$.

Теорема II, 1. Если $A\beta B$, то $B\gamma A$.

Теорема II, 2. Если $A\gamma B$, то $B\beta A$.

Теорема III. Соотношенія β и γ исключаютъ другъ друга, т.-е. если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A\beta B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A\gamma B$.

Теорема IV. Если $A_1\alpha A_2$, $A_2\alpha A_3, \ldots, A_{n-1}\alpha A_n$, то $A_1\alpha A_n$.

Теорема V. Если $A_1\beta A_2$, $A_2\beta A_3, \ldots, A_{n-1}\beta A_n$, то $A_1\beta A_n$.

Теорема VI. Если $A_1\gamma A_2$, $A_1\gamma A_3, \ldots, A_{n-1}\gamma A_n$, то $A_1\gamma A_n$.

Теорема VII. Если $A\alpha C$ и $B\alpha C$, то $A\alpha B$.

Теорема VIII, 1. Если $A\alpha B$ и $A\alpha C$, то $C\alpha B$.

Теорема VIII, 2. Если $A\alpha B$ и $B\alpha C$, то $A\alpha C$.

Теорема VIII, 3. Если $A\beta B$ и $A\alpha C$, то $C\beta B$.

Теорема VIII, 4. Если $A\beta B$ и $B\alpha C$, то $A\beta C$.

Теорема VIII, 5. Если $A\gamma B$ и $A\alpha C$, то $C\gamma B$.

Теорема VIII, 6. Если $A\gamma B$ и $B\alpha C$, то $A\gamma C$.

3. Теперь приведемъ различные примѣры осуществленія этихъ общихъ соображеній.

Положимъ, что нашъ комплексъ представляетъ собой нѣкоторую семью или, вѣрнѣе, родъ, а именно состоитъ изъ родоначальника A, его дѣтей $B_1, B_2, \ldots, B_b$, образующихъ второе поколѣніе, — изъ ихъ дѣтей $C_1, C_2, \ldots, C_c$, образующихъ третье поколѣніе, и т. д. Мы при этомъ предполагаемъ, что каждый членъ этого рода произошелъ отъ брака лица старшей линіи съ лицомъ, этому роду не принадлежащимъ. Мы будемъ говорить, что членъ этого рода M связанъ съ лицомъ N соотношеніемъ α или, лучше, находится къ члену N въ отношеніи $\alpha(M\alpha N)$, если онъ принадлежитъ тому же поколѣнію; мы будемъ дальше говорить, что лицо M находится къ лицу N въ отношеніи $\beta(M\beta N)$, если это лицо M принадлежитъ старшему поколѣнію, и въ отношеніи $\gamma(M\gamma N)$, если оно принадлежитъ младшему поколѣнію. Нужно не много вниманія, чтобы убѣдиться въ томъ, что постулаты I — VIII удовлетворены. Вмѣстѣ съ тѣмъ будутъ справедливы теоремы I — VIII, т. е. будутъ справедливы предложенія, которыя получатся, когда мы подъ $A, B, C, \ldots$ будемъ разумѣть членовъ нашего рода, а подъ α, β, γ — тѣ значенія, которыя мы имъ въ данномъ случаѣ приписали. Такъ, напримѣръ, теорема II, 1 выражаетъ слѣдующее: если лицо A принадлежитъ старшему поколѣнію относительно лица B, то B принадлежитъ младшему поколѣнію относительно лица A; теорема VII, скажемъ, выражаетъ: если лицо A принадлежитъ тому же поколѣнію, что и C, и B — тому же поколѣнію, что и C, то A принадлежитъ тому же поколѣнію, что и B.

Если бы, однако, въ этомъ роду происходили браки между его же членами, то дизъюнкція, требуемая постулатами I — III, не имѣла бы мѣста. Если бы, напримѣръ, нѣкоторое лицо M произошло отъ брака члена B_i (поколѣнія B) съ членомъ C_i (поколѣнія C), то оно по своему происхожденію отъ B_i должно было бы быть отнесено къ поколѣнію C (такъ что имѣло бы мѣсто соотношеніе $M\alpha C_i$), а по своему происхожденію отъ C_i оно должно было бы быть отнесено къ слѣдующему поколѣнію (такъ что имѣло бы мѣсто соотношеніе $M\gamma C_i$); постулатъ III, такимъ образомъ, не былъ бы удовлетворенъ.

Во многихъ случаяхъ гражданской юрисдикціи бываетъ очень важно установить старшинство, которое находилось бы въ согласіи съ постулатами I — VIII и, слѣдовательно, съ теоремами I — VIII. И всѣ гражданскіе кодексы такого рода старшинство дѣйствительно устанавливаютъ. Для обыкновенныхъ семействъ эти законоположенія даютъ полную дизъюнкцію; но при сложныхъ бракахъ внутри семьи дизъюнкція нарушается, и, такимъ образомъ, создаются сложные юридическіе казусы, приводящіе часто къ вмѣшательству законодательной власти; иными словами, оказывается необходимымъ дополнить или измѣнить критеріи, по которымъ устанавливаются соотношенія α, β, γ.

4. Нѣкоторыя твердыя тѣла обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что при надлежащей шлифовкѣ одно тѣло рѣжетъ другое. Выражаясь кратко, ножъ, сдѣланный изъ одного тѣла, рѣжетъ другое.

Положимъ, что мы имѣемъ группу такихъ тѣлъ. Если тѣло A сдѣлано изъ того же матеріала, что и тѣло B, или, вообще, если ножъ, сдѣланный изъ вещества A, не рѣжетъ вещества B и въ то же время ножъ, сдѣланный изъ вещества B, не рѣжетъ вещества A, то говорятъ, что оба вещества имѣютъ одинаковую твердость, и это отношеніе вещества A къ веществу B и, обратно, вещества B къ веществу A мы будемъ обозначать черезъ $\alpha (A \alpha B$ и $B \alpha A)$. Если ножъ изъ вещества A рѣжетъ тѣло B, то говорятъ, что тѣло A тверже тѣла B; это соотношеніе мы будемъ обозначать черезъ $A \beta B$. Если, наоборотъ, вещество A рѣжется ножомъ изъ вещества B, то говорятъ, что вещество A мягче, чѣмъ вещество B; это соотношеніе мы будемъ обозначать черезъ $A \gamma B$. Опытъ обнаруживаетъ, что при надлежащемъ составѣ группы тѣлъ эти соотношенія α, β, γ удовлетворяютъ постулатамъ I — VIII. Впрочемъ, справедливость постулатовъ I — III и VII вытекаетъ уже изъ прочихъ чисто логически. Если, напримѣръ, ни одно изъ тѣлъ A и B не рѣжетъ другого, то, по опредѣленію, не имѣютъ мѣста соотношенія β и γ, но имѣетъ мѣсто соотношеніе α; иначе говоря, соотношеніе α исключаетъ соотношенія β и γ. Если же одно изъ тѣлъ A и B рѣжетъ другое, то не имѣетъ мѣста соотношеніе α, но, по опредѣленію, имѣетъ мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ соотношеній $A \beta B$ или $A \gamma B$. Такимъ образомъ, дизъюнкція, требуемая постулатами I — III, всегда имѣетъ мѣсто. Далѣе, согласно самому опредѣленію, α есть соотношеніе обратимое (постулатъ VII). Что касается постулатовъ IV — VI и VIII, то ихъ справедливость устанавливается чисто опытнымъ путемъ. Опытно устанавливается, например, слѣдующее: если вещество A рѣжетъ вещество B, а вещество B рѣжетъ вещество C, то вещество A рѣжетъ вещество C (постулатъ V).

Именно вслѣдствіе того обстоятельства, что эти соотношенія удовлетворяютъ постулатамъ I — VIII, и оказывается возможнымъ установить скалу твердости. Аналогично устанавливается скала температуръ, скала потенціаловъ и т. д.

5. Одной изъ важнѣйшихъ системъ соотношеній разсмотрѣннаго типа является послѣдовательность во времени событій, происходящихъ въ одномъ и томъ же мѣстѣ. Положимъ, что нашъ комплексъ представляетъ собой нѣкоторую совокупность такихъ событій A, B, C, ... Подъ соотношеніемъ $A \alpha B$ мы будемъ разумѣть, что событіе A происходитъ одновременно съ событіемъ B; подъ соотношеніемъ $A \beta B$ мы будемъ разумѣть, что событіе A предшествуетъ событію B, и, наконецъ, подъ соотношеніемъ $A \gamma B$ мы будемъ разумѣть, что событіе A слѣдуетъ за событіемъ B. Что эти соотношенія удовлетворяютъ постулатамъ I — VIII, это составляетъ одно изъ основныхъ достояній нашего сознанія; опредѣлить источникъ этого сознанія есть одна изъ труднѣйшихъ задачъ теоріи познанія; ею не мало занимались философы и психологи, но врядъ ли ея разрѣшеніе сколько-нибудь подвинуто впередъ. Сдѣланная выше оговорка, что рѣчь идетъ о комплек-

сахъ событій, происходящихъ въ одномъ и томъ же мѣстѣ, имѣетъ существенное значеніе. Новѣйшіе взгляды, совокупность которыхъ извѣстна подъ названіемъ принципа относительности, отрицаютъ возможность примѣнять постулаты I — VIII къ свойствамъ одновременности и послѣдовательности событій безъ отношенія къ наблюдателю; иными словами, они признаютъ, что постулаты I — VIII справедливы лишь въ томъ случаѣ, если послѣдовательность событій устанавливается однимъ и тѣмъ же наблюдателемъ и въ одномъ и томъ же мѣстѣ.

6. Случаи, въ которыхъ приходится для того или иного комплекса устанавливать соотношенія α, β, γ, встрѣчаются въ повседневной жизни необычайно часто. Вслѣдствіе этого языкъ выработалъ особую постоянную форму для выраженія такого рода соотношеній. Замѣтимъ, что нѣтъ надобности имѣть особое названіе для каждаго изъ соотношеній β и γ, ибо, при наличности постулатовъ I — VIII, вмѣсто $A \gamma B$, въ силу теоремъ I и II, можно всегда сказать $B \beta A$. Если въ нѣкоторомъ комплексѣ устанавливаются соотношенія α, β, γ, удовлетворяющія постулатамъ I — VIII, то соотношеніе α обыкновенно выражается нѣкоторымъ прилагательнымъ въ положительной степени съ присоединеніемъ словъ „столь же“; соотношеніе β — тѣмъ же прилагательнымъ въ сравнительной степени; иногда, впрочемъ, соотношеніе β выражаютъ тѣмъ же прилагательнымъ съ присоединеніемъ слова „болѣе“, а γ — тѣмъ же прилагательнымъ съ присоединеніемъ слова „менѣе“ (или наоборотъ).

Тѣ признаки, по которымъ для даннаго комплекса и данной системы соотношеній α, β, γ устанавливается, которое именно изъ нихъ имѣетъ мѣсто, мы будемъ называть **критеріями сравненія**. Выше подробно выяснены критеріи относительнаго старшинства и относительной твердости. Но въ повседневной жизни не такъ часто встрѣчаются комплексы и соотношенія въ нихъ, для которыхъ критеріи сравненія были бы совершенно отчетливы; они часто сводятся даже къ расплывчатой чувственной оцѣнкѣ, которая различныхъ людей приводитъ къ различнымъ результатамъ. Въ этомъ положеніи мы находимся, когда судимъ объ относительномъ умѣ, красотѣ, добротѣ и т. д. Экспериментальныя науки идутъ въ этомъ направленіи гораздо дальше; въ нихъ критеріи сравненія бываютъ выражены несравненно точнѣе, но и здѣсь мы рѣдко располагаемъ возможностью произвести дизъюнкцію со всей необходимой точностью. Когда мы выше говорили о скалѣ твердости, мы были вынуждены оговориться, что рѣчь идетъ „о надлежаще выбранной группѣ тѣлъ“, ибо далеко не для всякихъ тѣлъ свойства, о которыхъ шла рѣчь, достаточно отчетливо выражены. Недостаточно отчетливо они бываютъ выражены и въ скалахъ, установленныхъ гораздо болѣе научно и играющихъ гораздо болѣе важную роль. Даже въ скалѣ, о которой была рѣчь въ пунктѣ 5, часто бываетъ очень трудно опредѣлить истинную послѣдовательность событій; здѣсь, какъ и во всемъ, существуетъ порогъ нашихъ ощущеній.

7. Отъ этихъ несовершенныхъ критеріевъ сравненія математика восходитъ къ абсолютно-точнымъ.

Когда математическое изслѣдованіе приводитъ насъ къ такому комплексу и къ такимъ соотношеніямъ въ немъ (α, β, γ), которыя вполнѣ удовлетворяютъ требованіямъ, или постулатамъ I — VIII, когда мы имѣемъ для этого совершенные критеріи сравненія, то такого рода комплексъ обыкновенно называютъ „величиной"; соотношеніе α называютъ при этомъ терминомъ „равно", соотношеніе β — терминомъ „больше", а соотношеніе γ — терминомъ „меньше" (или наоборотъ); элементы комплекса называютъ „значеніями" этой величины.

Когда мы въ нѣкоторомъ изслѣдованіи трактуемъ нѣкоторый комплексъ, какъ величину, то это означаетъ, что для элементовъ комплекса установлены критеріи сравненія, и что мы въ своемъ изслѣдованіи примѣняемъ къ соотвѣтствующимъ соотношеніямъ постулаты сравненія и теоремы I — VIII.

Названные постулаты и теоремы содержатъ все то, что относится ко всѣмъ безъ исключенія величинамъ; пользуясь же критеріями сравненія, мы уже приходимъ къ индивидуальнымъ особенностямъ отдѣльныхъ величинъ.

Устанавливая критеріи сравненія, мы претворяемъ комплексъ въ величину.

Итакъ, величиной называютъ всякій комплексъ, для элементовъ котораго установлены критеріи сравненія, удовлетворяющія постулатамъ I — VIII; иначе говоря, величина есть комплексъ, элементы котораго стоятъ одинъ къ другому въ отношеніи „равно" (α), „больше" (β), „меньше" (γ), при чемъ соотношенія эти удовлетворяютъ постулатамъ сравненія I — VIII.

8. Въ качествѣ перваго и важнѣйшаго примѣра математической величины мы разсмотримъ натуральный рядъ чиселъ. Цѣлыя числа, къ которымъ мы приходимъ при счетѣ элементовъ какого-нибудь комплекса, располагаются, какъ извѣстно, въ рядъ опредѣленной послѣдовательности, называемый натуральнымъ рядомъ чиселъ*). Если при счетѣ двухъ комплексовъ мы приходимъ къ числамъ a и b, занимающимъ въ натуральномъ ряду одно и то же мѣсто, то мы говоримъ, что число a равно числу b; если число a слѣдуетъ за числомъ b въ натуральномъ ряду, то мы говоримъ, что a больше b; если число a предшествуетъ числу b, то мы говоримъ, что a меньше b. Чтобы по этимъ критеріямъ сравненія опредѣлить, будетъ ли a равно b, больше b или меньше b, нужно называть числа натуральнаго ряда въ установленной послѣдовательности до тѣхъ поръ, пока не назовемъ чиселъ a и b. Въ зависимости отъ того, которое изъ чиселъ приходится при этомъ называть раньше, и устанавливается, которое изъ трехъ соотношеній имѣетъ мѣсто. Наша увѣренность въ томъ,

*) На самомъ актѣ построенія натуральнаго ряда мы здѣсь не останавливаемся; это относится уже къ ариѳметикѣ и можетъ быть выполнено различными способами.

что постулаты сравненія этимъ путемъ удовлетворяются, покоится, такимъ образомъ, на тѣхъ же основаніяхъ, какія были указаны въ пунктѣ 5. Были приложены большія усилія къ тому, чтобы установить самое построеніе натуральнаго ряда и дать такіе критеріи сравненія цѣлыхъ чиселъ, которые не предполагали бы уже напередъ построеннымъ натуральный рядъ и которые приводили бы къ доказательству закона совершенной индукціи. Объ этихъ пріемахъ, ведущихъ свое начало, главнымъ образомъ, отъ Дедекинда*), мы еще скажемъ нѣсколько словъ въ слѣдующемъ параграфѣ; здѣсь же мы ограничимся лишь замѣчаніемъ, что эти попытки не привели къ достаточно согласнымъ результатамъ. Мы поэтому примемъ натуральный рядъ, какъ нѣчто намъ извѣстное; мы примемъ, что предыдущіе критеріи сравненія удовлетворяютъ постулатамъ I—VIII, т.-е. что натуральный рядъ при этихъ критеріяхъ сравненія представляетъ собою величину.

9. Когда ариѳметика цѣлыхъ чиселъ установлена, то дальнѣйшее расширеніе комплекса чиселъ не представляетъ уже затрудненій. Изъ цѣлыхъ чиселъ составляютъ символы вида $\frac{m}{n}$, которые называютъ „дробями"; въ этихъ символахъ числитель m есть какое-угодно цѣлое число, а знаменатель n — цѣлое число, отличное отъ нуля. Вмѣстѣ съ тѣмъ уславливаются на символъ $\frac{m}{1}$ смотрѣть лишь, какъ на иное начертаніе символа m; такимъ образомъ, цѣлыя числа входятъ въ комплексъ дробей. Положимъ теперь, что $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$ суть двѣ дроби. Составимъ произведенія mn' и $m'n$. Такъ какъ это суть цѣлыя числа, а для таковыхъ критеріи сравненія удовлетворяютъ постулатамъ сравненія, то имѣетъ мѣсто одно и только одно изъ сотношеній

$$mn' = m'n, \quad mn' > m'n, \quad mn' < m'n. \qquad (1)$$

Установимъ теперь критеріи сравненія для комплекса дробей. Будемъ говорить, что дробь $\frac{m}{n}$ равна дроби $\frac{m'}{n'}$, если имѣетъ мѣсто первое изъ соотношеній (1), что дробь $\frac{m}{n}$ больше дроби $\frac{m'}{n'}$, если имѣетъ мѣсто второе, и, наконецъ, что дробь $\frac{m}{n}$ меньше дроби $\frac{m'}{n'}$, если имѣетъ мѣсто третье изъ соотношеній (1). Такъ какъ, по крайней мѣрѣ, одно изъ соотношеній (1) имѣетъ мѣсто и каждое изъ нихъ исключаетъ два другихъ, то то же справедливо относительно соотношеній

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}, \quad \frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}, \quad \frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}. \qquad (2)$$

*) R. Dedekind—„Was sind und was sollen die Zahlen"; Braunschweig, 1893. Имѣется русскій переводъ: Р. Дедекиндъ—„Что такое числа и для чего они служатъ?". Переводъ съ нѣмецкаго прив.-доц. Н. Парфентьева. Казань, 1905 г.

Иначе говоря, установленные критеріи сравненія дробей удовлетворяютъ постулатамъ I — III; покажемъ, что они удовлетворяютъ и остальнымъ постулатамъ. Прежде всего ясно, что равенство дробей есть свойство обратимое и возвратное. Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$, то $mn'=m'n$; но въ такомъ случаѣ и $m'n=mn'$, т.-е. $\frac{m'}{n'}=\frac{m}{n}$; точно такъ же $\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$, ибо $mn=mn$. Постулаты VII и VIII, такимъ образомъ, удовлетворены.

Остается обнаружить, что и постулаты IV — VI удовлетворены. Начнемъ съ IV-го. Положимъ, что $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ и $\frac{m'}{n'}=\frac{m''}{n''}$. Это значитъ, что

$$mn'=m'n \quad \text{и} \quad m'n''=m''n'. \tag{3}$$

Такъ какъ соотношенія (3) представляютъ собою равенства цѣлыхъ чиселъ, а ариѳметику цѣлыхъ чиселъ мы считаемъ установленной, то отсюда слѣдуетъ, что

$$mn'n''=m'nn'' \quad \text{и} \quad m'nn''=m''nn', \tag{4}$$

ибо равенство двухъ цѣлыхъ чиселъ не нарушится, если мы ихъ умножимъ на одно и то же число. Изъ соотношенія (4), въ силу транзитивности равенства цѣлыхъ чиселъ, вытекаетъ:

$$mn'n''=m''nn',$$

а, слѣдовательно,

$$mn''=m''n, \text{ т. е. } \frac{m}{n}=\frac{m''}{n''}.$$

Совершенно такъ же доказывается транзитивность соотношеній „больше“ и „меньше“; нужно только въ этомъ разсужденіи вмѣсто „равно“ всюду ставить соотвѣтственно „больше“ и „меньше“.

10. Итакъ, установленными выше критеріями сравненія совокупность дробей претворена въ величину. Докажемъ теперь еще слѣдующую теорему: *если мы въ нѣкоторой дроби умножимъ числителя и знаменателя на одно и то же число, то мы получимъ дробь, равную исходной.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\frac{m}{n}$ будетъ данная дробь; тогда дробь $\frac{mp}{np}$ равна исходной дроби, ибо имѣетъ мѣсто соотношеніе: $mnp=nmp$. Эта теорема выражаетъ свойство дробей, хотя и связанное съ идеею равенства, но специфически принадлежащее этой величинѣ; оно проистекаетъ изъ критеріевъ сравненія.

11. При введеніи ирраціональныхъ чиселъ мы также должны начать съ претворенія новаго комплекса объектовъ въ величину, т.-е. съ установленія критеріевъ сравненія. Это задача болѣе сложная, и

мы не будемъ здѣсь ею заниматься*). Замѣтимъ только, что правильное установленіе этихъ критеріевъ составляетъ основу современнаго построенія анализа.

12. Геометрія приноситъ цѣлый рядъ новыхъ величинъ. На первомъ мѣстѣ появляется совокупность прямолинейныхъ отрѣзковъ. Въ настоящее время на первыхъ страницахъ каждаго учебника мы находимъ критеріи сравненія, претворяющіе этотъ комплексъ въ величину. Они сводятся къ слѣдующему. Пусть AB и $A'B'$ будутъ два отрѣзка. Наложимъ первый отрѣзокъ на второй такъ, чтобы точка A упала въ точку A'; если при этомъ точка B упадетъ въ точку B', то отрѣзокъ AB равенъ отрѣзку $A'B'$; если точка B упадетъ внутрь отрѣзка $A'B'$, то отрѣзокъ AB меньше отрѣзка $A'B'$; если точка B упадетъ за предѣлы отрѣзка $A'B'$, то отрѣзокъ AB меньше отрѣзка $A'B'$. Чтобы комплексъ прямолинейныхъ отрѣзковъ былъ при этомъ претворенъ въ величину, нужно доказать, что постулаты сравненія здѣсь удовлетворены. Этого, однако, обыкновенно не дѣлаютъ. Насколько это существенно, покажетъ слѣдующій примѣръ.

Совокупность прямолинейныхъ угловъ претворяется въ величину. Критеріи сравненія сводятся къ слѣдующему. Пусть ABC и $A'B'C'$ будутъ два прямолинейныхъ угла. Наложимъ первый на второй такъ, чтобы вершина B упала въ вершину B', чтобы сторона BC совпала со стороной $B'C'$; если при этомъ сторона BA совмѣстится со стороной $B'A'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$; если сторона BC упадетъ внутрь угла $A'B'C'$, то $\angle ABC < \angle A'B'C'$; если сторона BC упадетъ внѣ второго угла, то $\angle ABC > \angle A'B'C'$. Это обычные критеріи сравненія; и въ этомъ случаѣ мы опять не находимъ въ руководствахъ по геометріи доказательства постулатовъ сравненія.

Попытаемся теперь установить для комплекса угловъ иные критеріи сравненія. Именно, будемъ говорить, что уголъ ABC равенъ углу $A'B'C'$, если онъ ему конгруэнтенъ, т.-е. если онъ можетъ быть приведенъ съ нимъ въ совмѣщеніе; далѣе, будемъ говорить, что уголъ ABC меньше угла $A'B'C'$, если онъ можетъ быть помѣщенъ внутри второго угла; наконецъ, будемъ говорить, что уголъ ABC больше угла $A'B'C'$, если онъ можетъ быть приведенъ въ такое положеніе, чтобы второй уголъ помѣстился внутри его. Это было бы, однако, ошибочно, ибо постулаты сравненія не были бы удовлетворены; именно, не были бы удовлетворены постулаты II и III, т.-е. равенство не исключало бы неравенства: если два угла конгруэнтны, то первый можетъ быть совмѣщенъ со вторымъ, можетъ быть помѣщенъ внутри его, можетъ его охватывать (углы съ параллельными и сонаправленными сторонами). Между тѣмъ эту ошибку несомнѣнно допускали: мы увидимъ ниже, къ какимъ это приводило заблужденіямъ.

---

*) См. R. Dedekind — „Stetigkeit und irrationale Zahlen"; Braunschweig, 3-e Aufl., 1905. Имѣется русскій переводъ, принадлежащій прив.-доц. С. О. Шатуновскому: Р. Дедекиндъ — „Непрерывность и ирраціональныя числа"; Одесса, 2-ое изд., 1909.

Длины, площади, объемы и т. д. — все это суть геометрическія величины; какъ это утвержденіе обосновывается, будетъ показано во второй части настоящаго сочиненія.

§ 5. Нумерованіе, исчисленіе и измѣреніе.

1. Мы упомянули въ предыдущемъ параграфѣ (п. 8) о томъ, что многіе авторы по теоретической ариѳметикѣ дѣлали попытку обосновать самое построеніе натуральнаго ряда и законъ совершенной индукціи. Всѣ эти попытки такъ или иначе основаны на идеѣ сопряженія. „Одна изъ основныхъ особенностей нашего духа“, — говоритъ Дедекиндъ, — „заключается въ нашей способности относить одну вещь къ другой, сопрягать одну вещь съ другой, отображать одну вещь въ другой“. Сущность этого заключается въ слѣдующемъ. Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторый комплексъ $\mathfrak{A}$, состоящій изъ элементовъ A, B, $C, \ldots$, и другой комплексъ $\mathfrak{B}$, состоящій изъ элементовъ A', B', $C', \ldots$. Допустимъ, что каждый элементъ комплекса $\mathfrak{A}$ отнесенъ нѣкоторому элементу комплекса $\mathfrak{B}$ въ качествѣ соотвѣтствующаго ему; когда это сдѣлано, то говорятъ, что комплексъ $\mathfrak{A}$ сопряженъ съ комплексомъ $\mathfrak{B}$ или отображенъ въ комплексѣ $\mathfrak{B}$. Положимъ, напримѣръ, что комплексъ $\mathfrak{A}$ состоитъ изъ элементовъ A, B, C, D, а комплексъ $\mathfrak{B}$ — изъ элементовъ A', B', C', D', E', F'. Отнесемъ элементъ A элементу B', элементъ B — элементу D', элементъ C — элементу F' и элементъ D — элементу A'. Этимъ будетъ установлено нѣкоторое сопряженіе комплекса $\mathfrak{A}$ съ комплексомъ $\mathfrak{B}$; оно наглядно выражается слѣдующей таблицей:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} D & A & & B & & C \\ A' & B' & C' & D' & E' & F'. \end{array}$$

Само собою разумѣется, что такого рода сопряженіе можно производить многообразно, — особенно, если никакими дополнительными требованіями его не ограничивать. Съ точки зрѣнія предыдущаго опредѣленія, напримѣръ, можно нѣсколько элементовъ комплекса $\mathfrak{A}$ отнести одному и тому же элементу комплекса $\mathfrak{B}$, — напримѣръ, произвести сопряженіе въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c} A\ B\ C & & D & & & \\ \searrow \downarrow \swarrow & & & & & \\ A' & B' & C' & D' & E' & F'. \end{array}$$

Сопряженіе называется однозначнымъ, если различные элементы перваго комплекса отнесены различнымъ же элементамъ второго; такъ, первое изъ указанныхъ выше сопряженій есть сопряженіе однозначное. Сопряженіе называется взаимно-однозначнымъ или совершеннымъ, если каждый элементъ перваго комплекса отвѣчаетъ одному элементу второго и каждому элементу второго отвѣ-

чаетъ одинъ и только одинъ элементъ перваго. Нижеслѣдующая таблица изображаетъ совершенное сопряженіе:

B	D	A	C
A'	B'	C'	D'

2. Съ совокупностью всевозможныхъ комплексовъ Канторъ связываетъ новую величину — мощность; именно, онъ устанавливаетъ слѣдующіе критеріи сравненія. Если комплексъ $\mathfrak{A}$ можетъ быть приведенъ въ совершенное сопряженіе съ комплексомъ $\mathfrak{B}$, то мы будемъ говорить, что комплексъ $\mathfrak{A}$ имѣетъ ту же мощность, что и комплексъ $\mathfrak{B}$; если комплексъ $\mathfrak{A}$ можетъ быть приведенъ въ однозначное соотвѣтствіе съ частью комплекса $\mathfrak{B}$, то мы будемъ говорить, что комплексъ $\mathfrak{A}$ имѣетъ меньшую мощность, чѣмъ $\mathfrak{B}$; если же, наконецъ, часть комплекса $\mathfrak{A}$ можетъ быть приведена въ однозначное соотвѣтствіе со всѣмъ комплексомъ $\mathfrak{B}$, то мы будемъ говорить, что комплексъ $\mathfrak{A}$ имѣетъ меньшую мощность, нежели $\mathfrak{B}$.

Удовлетворяютъ ли эти критеріи сравненія постулатамъ I—VIII? Несложныя соображенія приводятъ къ отрицательному отвѣту на этотъ вопросъ. Дѣйствительно, возьмемъ натуральный рядъ чиселъ и будемъ его разсматривать, какъ комплексъ, изъ этихъ чиселъ составленный. Отнесемъ теперь число 2 въ качествѣ соотвѣтствующаго числу 1, число 3 — числу 2, число 4 — числу 3, вообще каждое число — въ качествѣ соотвѣтствующаго предыдущему числу, какъ это изображено на слѣдующей таблицѣ:

2	3	4	5	. . .
↓	↓	↓	↓	
1	2	3	4	. . .

Натуральный рядъ приводится этимъ путемъ въ совершенное соотвѣтствіе со своею же частью, т.-е., по смыслу предыдущаго опредѣленія, онъ имѣетъ бо́льшую мощность, чѣмъ онъ же самъ; постулатъ VIII, такимъ образомъ, не удовлетворенъ. Дальнѣйшее развитіе той же идеи приводитъ къ тому, что и дизъюнкціи эти критеріи не даютъ.

Итакъ, изложенные въ предыдущемъ параграфѣ критеріи сравненія не удовлетворяютъ постулатамъ сравненія, между прочимъ, потому, что существуютъ такіе комплексы, которые могутъ быть приведены въ совершенное сопряженіе каждый со своею частью. Это привело Кантора и Дедекинда къ мысли о выдѣленіи такихъ комплексовъ въ особую категорію; именно, названные авторы опредѣляютъ конечный комплексъ, какъ такой, который не можетъ быть приведенъ въ совершенное сопряженіе со своею частью, — и безконечный

комплексъ, какъ такой, въ которомъ такое сопряженіе возможно. Этимъ достигалась двоякая цѣль. Съ одной стороны, это приводило къ логическому опредѣленію конечнаго и безконечнаго комплекса, а съ другой стороны — представлялось возможнымъ сдѣлать попытку примѣнить предыдущіе критеріи сравненія къ однимъ только конечнымъ комплексамъ и такимъ образомъ прійти къ построенію натуральнаго ряда чиселъ.

4. Идея этой послѣдней попытки заключалась, такимъ образомъ, въ слѣдующемъ. Вмѣсто того, чтобы сравнивать всевозможные комплексы, какъ мы это дѣлали въ п. 2, будемъ разсматривать только совокупность всевозможныхъ **конечныхъ** комплексовъ и къ нимъ примѣнимъ тѣ же критеріи сравненія относительно равной, большей и меньшей мощности. Въ этомъ случаѣ дизъюнкція дѣйствительно окажется выполнимой и вообще всѣ постулаты сравненія будутъ удовлетворяться. Дальнѣйшій порядокъ идей таковъ. Совокупность всевозможныхъ конечныхъ комплексовъ разбивается на классы такимъ образомъ, что всѣ комплексы одного класса имѣютъ одинаковую мощность, а комплексы, принадлежащіе различнымъ классамъ, имѣютъ различную мощность. Затѣмъ каждому такому классу мы относимъ, присваиваемъ терминъ или символъ, служащій для характеристики мощности этого класса. Это означаетъ, собственно, только слѣдующее. Если a есть символъ (терминъ), отнесенный къ классу A, а b — соотвѣтственно символъ, отнесенный къ классу B, то предложенія $a=b$, $a>b$, $a<b$ представляютъ собой сокращенное выраженіе слѣдующихъ предложеній: каждый комплексъ класса A имѣетъ ту же (соотвѣтственно большую или меньшую) мощность, что и каждый комплексъ класса B. Эти новые символы или термины и называются **цѣлыми числами**. Остается только обнаружить, что эти числа можно расположить въ рядъ такимъ образомъ, чтобы каждое послѣдующее число было больше предыдущаго, и чтобы не существовало числа, которое больше нѣкотораго члена этого ряда и въ то же время меньше послѣдующаго члена. Осуществленіе этой идеи уже само по себѣ должно было приводить къ доказательству закона совершенной индукціи.

Изложеніе началъ ариѳметики въ этомъ порядкѣ идей можно найти въ первомъ изданіи I тома „Энциклопедіи элементарной математики“ **Вебера и Вельштейна***).

5. Однако, на пути осуществленія этихъ идей встрѣтились затрудненія, которыя по настоящее время еще не преодолѣны. Затрудненія эти двоякаго рода: во-первыхъ, обнаружилось, что попытки вести разсужденія о **всевозможныхъ** комплексахъ (хотя бы даже и конечныхъ) такъ, какъ мы ихъ ведемъ относительно совершенно опредѣленной совокупности объектовъ, приводятъ къ логическому противорѣчію. Это такъ называемыя антиноміи, указанныя впервые **Фреге**. Источникъ этого логическаго противорѣчія заключается, повидимому,

*) H. **Weber** und I. **Wellstein** — „Encyklopedie der elementaren Mathematik“, Bd. I. Русскій переводъ подъ указаннымъ выше названіемъ выпущенъ издательствомъ „Матезисъ“ подъ редакціей автора настоящаго сочиненія.

въ томъ, что совокупность всевозможныхъ „комплексовъ“ есть нѣчто не настолько опредѣленное, чтобы служить объектомъ точныхъ разсужденій. Во-вторыхъ, затрудненіе заключается еще и въ томъ, что самыя эти разсужденія уже необходимо оперируютъ надъ числами. Приходится говорить объ одномъ, двухъ, трехъ и большемъ количествѣ объектовъ, и, если мы это говоримъ въ томъ именно разсужденіи, которое имѣетъ цѣлью установить понятіе о цѣломъ числѣ, то мы явно оказываемся въ ложномъ кругѣ**). Уже во второмъ изданіи своей книги Веберъ указываетъ слабыя стороны этой теоріи, а въ третьемъ изданіи онъ отъ нея вовсе отказывается и даетъ совершенно иное изложеніе, основанное на идеѣ послѣдовательности (§ 4, п. 5).

6. Итакъ, примѣнить эту идею къ построенію натуральнаго ряда, исходя изъ болѣе простыхъ понятій, до настоящаго времени не удалось, какъ мы объ этомъ уже упоминали выше. Мы, однако, привели всѣ эти разсужденія для того, чтобы здѣсь же ознакомить читателя съ идеей сопряженія, которая все-таки играетъ чрезвычайно важную роль въ обоснованіи математическихъ теорій. Принимая ариѳметику, какъ нѣчто уже построенное, мы укажемъ здѣсь два особенно важныхъ вида сопряженія, которыми чаще всего пользуются для претворенія даннаго комплекса въ величину.

7. Во многихъ случаяхъ элементы комплекса приводятъ въ сопряженіе съ членами натуральнаго ряда (со всѣми его членами или съ ограниченнымъ рядомъ начальныхъ его членовъ). Этотъ процессъ производится съ двоякою цѣлью: либо для нумераціи, либо для исчисленія. Если мы относимъ каждому элементу нѣкотораго комплекса число съ цѣлью нумераціи, то мы имѣемъ въ виду воспользоваться этимъ пріемомъ для отличенія одного элемента отъ другого. Если же мы производимъ это сопряженіе для исчисленія, то мы имѣемъ въ виду претвореніе этого комплекса въ величину въ томъ смыслѣ, что бо́льшимъ признается тотъ элементъ, которому мы отнесли бо́льшее число (или обратно). Такъ, въ примѣрѣ, приведенномъ въ п. 3 § 4-го, мы фактически каждому члену рода отнесли число, выражающее, сколько поколѣній отдѣляетъ его отъ общаго предка; двумъ членамъ рода, которымъ, такимъ образомъ, отвѣчаетъ одно и то же число, мы приписали одинаковое старшинство; изъ двухъ же членовъ, которымъ соотвѣтствуютъ различныя числа, мы приписали большее старшинство тому, которому при этомъ „исчисленіи“ соотвѣтствуетъ меньшее число.

Помимо старшинства въ родѣ законодательство предусматриваетъ еще „степень родства“ между любыми двумя членами рода. Два члена одного и того же рода могутъ находиться въ болѣе близкомъ или въ менѣе близкомъ родствѣ; какъ это точно установить? Прежде всего замѣтимъ, что при этой постановкѣ вопроса сравнивается не одно лицо съ другимъ, а одна пара лицъ съ другой парой (вопросъ заключается въ томъ, чтобы опредѣлить, какая пара тѣснѣе связана род-

**) H. Poincaré — „La science et la méthode“. Русскій переводъ: А. Пуанкаре — „Наука и Методъ“. Переводъ съ французскаго подъ редакціей прив.-доп. В. Кагана. Изд. „Mathesis“. Одесса, 1910.

ствомъ). Комплексъ состоитъ, такимъ образомъ, изъ паръ; каждая комбинація изъ двухъ членовъ рода составляетъ элементъ комплекса. Каждому такому элементу, каждой парѣ относятъ число слѣдующимъ образомъ: вычисляютъ, сколько поколѣній отдѣляетъ каждаго члена пары отъ общаго предка, и полученныя числа складываютъ; каждой парѣ этимъ путемъ отнесено цѣлое число, такъ называемая „степень родства". Чѣмъ меньше степень родства, тѣмъ тѣснѣе признается родство. Этимъ путемъ комплексъ претворяется въ величину.

Этотъ способъ претворенія комплекса въ величину, основанный на сопряженіи его съ комплексомъ цѣлыхъ чиселъ, мы будемъ называть исчисленіемъ. Счетъ въ обыкновенномъ смыслѣ слова есть простѣйшій случай такого исчисленія.

8. Мы приведемъ еще одинъ очень любопытный примѣръ претворенія комплекса въ величину путемъ исчисленія.

Извѣстно, что геометрическія задачи на построеніе часто допускаютъ различные методы рѣшенія. Какое рѣшеніе проще? Въ большой мѣрѣ это, конечно, зависитъ отъ вкуса; но въ послѣдніе годы среди французскихъ, главнымъ образомъ, ученыхъ, появилось стремленіе придать оцѣнкѣ простоты объективный характеръ — претворить простоту построенія въ величину. Вотъ какъ это дѣлаетъ Лемуанъ (Lemoine) для построеній, производимыхъ при помощи циркуля и линейки. Онъ разбиваетъ каждое построеніе на отдѣльные акты. Эти элементарные акты суть слѣдующіе: 1) прикладываніе линейки къ данной точкѣ, 2) проведеніе прямой, 3) помѣщеніе ножки циркуля въ данную точку, 4) проведеніе окружности, когда ножка циркуля уже помѣщена въ центрѣ, а растворъ уже равенъ радіусу окружности. Всякое построеніе разбивается на эти элементарные акты. Напримѣръ, проведеніе прямой черезъ данныя двѣ точки требуетъ трехъ элементарныхъ актовъ (приложеніе линейки къ одной точкѣ, къ другой точкѣ, проведеніе прямой); проведеніе окружности изъ даннаго центра A радіусомъ, опредѣляемымъ точками B и C, распадается на четыре элементарныхъ акта (помѣщеніе ножки циркуля въ точку B, затѣмъ другой ножки въ точку C, затѣмъ помѣщеніе одной ножки въ точку A и, наконецъ, проведеніе окружности взятымъ уже радіусомъ); это число понижается до трехъ, если одна изъ точекъ B или C совпадаетъ съ A. Теперь мы каждому построенію отнесемъ число, равное числу элементарныхъ операцій, на которыя оно распадается. Будемъ теперь считать построеніе тѣмъ проще, чѣмъ меньше число основныхъ операцій, на которыя оно распадается. Ясно, что постулаты сравненія будутъ удовлетворены, и что совокупность построеній циркулемъ и линейкой будетъ претворена въ величину путемъ исчисленія.

9. Совершенно иной характеръ носитъ сопряженіе безконечнаго комплекса со всей совокупностью вещественныхъ чиселъ или съ совокупностью всѣхъ вещественныхъ чиселъ, содержащихся въ опредѣленномъ интервалѣ, — напримѣръ, между 0 и 1. Если это сдѣлано, если мы затѣмъ будемъ считать тотъ элементъ больше, которому отнесено большее число, то комплексъ будетъ этимъ путемъ претворенъ въ величину. Такъ, напримѣръ, каждому углу (въ обыкновенномъ геометрическомъ

значеніи слова, т.-е. не превышающему $2d$) мы относимъ число, содержащееся между 0 и π; при этомъ большее число соотвѣтствуетъ большему углу въ смыслѣ опредѣленія, установленнаго въ п. 11 § 4-го. Въ этомъ сопряженіи элементовъ комплекса (значеній величины) съ непрерывнымъ рядомъ вещественныхъ чиселъ заключается основной моментъ въ дѣлѣ измѣренія величины; измѣреніе, однако, этимъ не исчерпывается; мы вернемся къ этому вопросу ниже. Здѣсь же замѣтимъ, что величина, приведенная въ сопряженіе со всей совокупностью вещественныхъ чиселъ или со всей совокупностью вещественныхъ чиселъ, содержащихся въ извѣстномъ интервалѣ, называется скалярной величиной или, просто, скаляромъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Природа солнца.

К. Г. Аббо.

Изученіе солнца можетъ вестись съ различныхъ точекъ зрѣнія. Будучи центральнымъ тѣломъ всей системы, солнце, благодаря огромной силѣ притяженія, управляетъ движеніемъ планетъ, и это открываетъ привлекательное и обширное поле для изслѣдованій. Съ другой стороны, мы можемъ изучать химическій составъ и физическое состояніе солнца. Здѣсь мы имѣемъ лабораторію, гдѣ господствуютъ такія условія давленія и температуры, какими не можетъ располагать ни одинъ физикъ на землѣ. Здѣсь мы видимъ, какъ бокъ-о-бокъ, относясь, повидимому, совершенно индифферентно другъ къ другу, существуютъ элементы, о которыхъ мы привыкли думать, что они немедленно вступаютъ въ химическое соединеніе, производя сильнѣйшіе взрывы. Далѣе, мы можемъ разсматривать солнце, какъ одно изъ многихъ небесныхъ тѣлъ, и сравнивать его съ другими звѣздами въ отношеніи массы, яркости, химическаго состава, физическаго состоянія, свойствъ ихъ планетныхъ системъ. Наконецъ, можно прослѣдить, какъ солнце, прямымъ или косвеннымъ образомъ, является источникомъ теплоты и энергіи на землѣ, и установить, какимъ образомъ солнечный свѣтъ является необходимымъ агентомъ, вызывающимъ химическія реакціи, связанныя съ ростомъ растеній. Съ этой точки зрѣнія мы должны считать наше свѣтило, въ нѣкоторомъ смыслѣ, источникомъ и хранителемъ самой жизни.

Астрономы давно уже пришли къ полному почти согласію на счетъ разстоянія отъ земли, діаметра, массы и плотности солнца. Мы знаемъ, съ приближеніемъ, пожалуй, до одной тысячной, что среднее разстояніе солнца отъ земли равно 149 560 000 *км.*, а діаметръ, въ среднемъ, равенъ 1 392 000 *км.*, что его масса въ 332 800 разъ больше

массы земли, а его средняя плотность въ 1,41 разъ больше плотности воды.

На основаніи присутствія характерныхъ линій поглощенія въ солнечномъ спектрѣ было обнаружено присутствіе на солнцѣ цѣлаго ряда элементовъ. Послѣдніе расположены въ приводимой ниже таблицѣ въ порядкѣ убыванія интенсивности линій, вызываемыхъ ими въ солнечномъ спектрѣ.

№	Элементъ	Атомный вѣсъ	№	Элементъ	Атомный вѣсъ	№	Элементъ	Атомный вѣсъ
1	Кальцій . .	40.09	13	Марганецъ .	54.93	25	Мѣдь . .	63.57
2	Желѣзо . .	58.85	14	Ванадій . .	51.2	26	Цинкъ .	65.37
3	Водородъ .	1.008	15	Барій . .	137.37	27	Кадмій .	112.40
4	Натрій . .	23.00	16	Углеродъ (?)	12.00	28	Церій .	140.25
5	Никкель .	58.68	17	Скандій . .	44.1	29	Берилій	9.1
6	Магній . .	24.32	18	Иттрій . .	89.0	30	Германій	72.5
7	Кобальтъ .	58.97	19	Цирконій .	90.6	31	Родій . .	102.9
8	Кремній .	28.3	20	Молибденъ	96.0	32	Серебро	107.88
9	Алюминій .	27.1	21	Лантанъ .	139.0	33	Олово .	119.0
10	Титанъ . .	48.1	22	Ніобій . .	93.5	34	Свинецъ	207.10
11	Хромъ . .	52.0	23	Палладій .	106.7	35	Эрбій . .	167.4
12	Стронцій .	87.62	24	Неодимъ .	144.3	36	Гелій . .	3.99
Элементы, присутствіе которыхъ на солнцѣ не твердо установлено:								
37	Калій . . .	39.10	42	Индій . . .	114.8	46	Танталъ	181.0
38	Рутеній . .	101.7	43	Осмій . . .	190.9	47	Иридій .	193.1
39	Вольфрамъ	184.0	44	Ртуть . . .	200.0	48	Таллій .	201.0
40	Платина .	195.0	45	Торій . . .	232.42	49	Уранъ .	238.5
41	Висмутъ .	208.0						

Повидимому, на солнцѣ существуютъ условія, мѣшающія появленію соединеній, встрѣчающихся на землѣ. Впрочемъ, въ солнечныхъ пятнахъ открыты нѣкоторыя химическія соединенія, — между прочимъ, окись титана, а также водородныя соединенія магнія и кальція.

Спектральныя линіи самыхъ сильныхъ не-металлическихъ химическихъ элементовъ, каковы азотъ, фосфоръ, хлоръ, бромъ, іодъ и сѣра, не встрѣчаются въ солнечномъ спектрѣ. Есть много основаній сомнѣваться въ томъ, что кислородъ представленъ въ спектрѣ тѣми тремя инфракрасными линіями, которыя ему приписываютъ, а между тѣмъ онъ безусловно входитъ въ составъ химическихъ соединеній, встрѣчающихся въ солнечныхъ пятнахъ. Весьма вѣроятно, что и другіе не-металлическіе элементы на самомъ дѣлѣ существуютъ на солнцѣ, но не

обнаруживаютъ своихъ обычныхъ спектральныхъ линій. Вѣроятность этого станетъ очень значительной, если мы примемъ во вниманіе, что, напримѣръ, линіи хлора не обнаруживаются въ спектрѣ поваренной соли, и что вообще сильные не-металлическіе элементы не даютъ линій въ спектрѣ своихъ солей. Элементы, химически родственные только-что указаннымъ (какъ, напримѣръ, олово и висмутъ, родственные азоту и фосфору) обладаютъ также свойствами металловъ, и ихъ линіи встрѣчаются въ солнечномъ спектрѣ. Спектральныя линіи, приписывавшіяся раньше углероду, въ настоящее время большинствомъ ученыхъ приписываются ціану, состоящему изъ углерода и азота.

Достоинъ особаго вниманія тотъ фактъ, что линіи солнечнаго спектра становятся все менѣе интенсивными по мѣрѣ увеличенія атомнаго вѣса элементовъ. Правда, въ этомъ отношеніи не замѣчается полной закономѣрности, но, что тенденція въ этомъ направленіи имѣется, въ этомъ насъ безусловно убѣждаетъ вышеприведенная таблица. Прежде чѣмъ разсмотрѣть значеніе этого явленія, слѣдуетъ поговорить о вѣроятныхъ температурахъ, господствующихъ на солнцѣ.

Понятіе о температурѣ, которое вначалѣ было связано лишь съ ощущеніями теплоты, получило послѣ изобрѣтенія термометра опредѣленную количественную оцѣнку, основанную на измѣреніи степени расширенія ртути или алкоголя. Дальнѣйшія усовершенствованія привели къ тому, что въ практику былъ введенъ газовый термометръ, въ которомъ повышеніе температуры измѣряется степенью расширенія газа, находящагося подъ однимъ и тѣмъ же давленіемъ, или же степенью увеличенія давленія газа, объемъ котораго остается постояннымъ. Газовымъ термометромъ пользуются лишь для измѣренія температуръ, не превосходящихъ 1500° C, такъ какъ при болѣе высокихъ температурахъ стѣнки инструмента начинаютъ абсорбировать газъ и пропускать его сквозь себя.

Сначала температуру отсчитывали, начиная отъ произвольно выбраннаго нуля, представляющаго собою въ шкалѣ Цельсія точку таянія льда; изученіе термодинамики привело къ представленію объ абсолютномъ нулѣ температуры, который нынѣ считаютъ находящимся у —273° C. Въ послѣдніе годы эта температура была почти достигнута при опытахъ превращенія въ жидкое и твердое состояніе водорода и гелія.

Была изучена зависимость количества и качества лучей, испускаемыхъ раскаленными тѣлами, отъ ихъ температуръ (въ предѣлахъ до 1600° абсолютной температуры). Въ этомъ отношеніи было найдено явное различіе между газами, жидкостями и твердыми тѣлами, а также между различными представителями этихъ классовъ. Газы при небольшомъ и среднемъ давленіи, въ общемъ, испускаютъ свѣтъ въ видѣ узкихъ спектральныхъ линій или группъ линій; кромѣ того, считаютъ, что во многихъ случаяхъ для полученія и этихъ линій или группъ линій требуется не только нагрѣваніе, но и примѣненіе электрической энергіи. Однако, при увеличеніи давленія спектры газовъ, вслѣдствіе утолщенія спектральныхъ линій, получаютъ все болѣе непрерывный характеръ. Отсюда дѣлаютъ предположеніе, что подъ вліяніемъ того высокаго давленія, которое господствуетъ во внутреннихъ частяхъ

солнца, всѣ газы должны давать сплошной спектръ, подобный спектру твердыхъ и жидкихъ тѣлъ.

Въ ученіе о лучистой энергіи введено понятіе, которое не реализовано вполнѣ ни однимъ изъ веществъ; это — понятіе о „совершенномъ" источникѣ лучистой энергіи. Такой источникъ при всякой данной температурѣ и при всякой длинѣ волны долженъ испускать максимумъ той лучистой энергіи, которая вообще можетъ быть испускаема при этой температурѣ. Кирхгоффъ (Kirchoff) доказалъ, что внутри полаго помѣщенія, со стѣнками, имѣющими постоянную температуру, лучеиспусканіе имѣетъ такой совершенный характеръ. Если въ стѣнкѣ такого помѣщенія продѣлать маленькое отверстіе, то лучеиспусканіе, проникающее черезъ это отверстіе, можно на практикѣ считать совершеннымъ. Существующія въ дѣйствительности тѣла по своей способности къ лучеиспусканію въ различной мѣрѣ приближаются къ совершенному источнику.

Существуютъ три главныхъ закона, устанавливающихъ связь между абсолютной температурой и лучеиспусканіемъ совершеннаго источника. Эти законы слѣдующіе: 1) Все количество лучистой энергіи пропорціонально четвертой степени абсолютной температуры (Stefan). 2) Длина волны максимальнаго лучеиспусканія обратно пропорціональна абсолютной температурѣ (Wien). 3) Энергія для каждой длины волны выражается при помощи формулы:

$$e_\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\left(E^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)} \quad \text{(Wien-Planck)},$$

гдѣ e_λ есть интенсивность лучеиспусканія при длинѣ волны λ, c_1 и c_2 — постоянныя величины, E — основаніе натуральныхъ логариѳмовъ, а T — абсолютная температура. Эти законы подходятъ для всѣхъ температуръ между абсолютнымъ нулемъ и $1600°C$. Благодаря знанію этихъ законовъ мы получаемъ всѣ наши свѣдѣнія о вѣроятной температурѣ, царящей на солнцѣ.

Измѣряя солнечную теплоту, получаемую на земной поверхности, и учитывая тепловую потерю, которой подвергаются солнечные лучи при прохожденіи черезъ атмосферу, мы на основаніи закона Стефана выводимъ, что энергія лучеиспусканія солнца равна энергіи совершеннаго источника при абсолютной температурѣ въ 5830° С.

Опредѣляя положеніе максимума энергіи въ солнечномъ спектрѣ, какимъ онъ долженъ быть внѣ атмосферы, мы находимъ, что совершенный источникъ долженъ былъ бы обладать абсолютной температурой въ 6230° С, чтобы дать подобный максимумъ въ своемъ спектрѣ.

Изъ сравненія формы кривой, выражающей распредѣленіе энергіи въ солнечномъ спектрѣ, какимъ его нужно считать внѣ атмосферы, съ вычисленнымъ распредѣленіемъ энергіи въ совершенномъ источникѣ слѣдуетъ, что, хотя между распредѣленіемъ энергіи въ обоихъ спектрахъ имѣется большое сходство, но все-же полнаго соотвѣтствія между ними въ этомъ отношеніи не наблюдается ни при какой

температурѣ. Соотвѣтствіе наиболѣе велико для абсолютныхъ температуръ въ предѣлахъ между 6000° С и 7000° С.

Изученіе спектровъ тѣлъ, имѣющихся на землѣ, повидимому, доказываетъ, что вышеуказанные методы даютъ температуры болѣе низкія, чѣмъ дѣйствительныя температуры, полученныя для тѣлъ, не представляющихъ собою совершенныхъ источниковъ лучистой энергіи. Отсюда мы заключаемъ, что поверхность, составляющая существенный источникъ солнечнаго лучеиспусканія, обладаетъ температурой выше 6000° С, доходящей, можетъ быть, до 7000° С. Такимъ образомъ, мы имѣемъ здѣсь число, гораздо большее, чѣмъ число выражающее самую высокую температуру изъ извѣстныхъ намъ для земныхъ источниковъ свѣта, а именно абсолютную температуру электрической дуги, равную, повидимому, приблизительно 4000° С. Всѣ земныя вещества въ электрической дугѣ при атмосферномъ давленіи испаряются. Конечно, увеличеніе давленія повышаетъ точку кипѣнія, — фактъ, хорошо извѣстный тѣмъ, кто наблюдалъ температуру кипѣнія въ горахъ. Но новѣйшія изслѣдованія Эвершеда (Evershed) и Ст. Джона (St. John) достаточно ясно обнаруживаютъ, что въ наиболѣе глубокихъ изъ тѣхъ слоевъ солнца, которые принимаютъ участіе въ образованіи линейныхъ спектровъ, давленіе весьма мало превосходитъ атмосферное давленіе, если только оно его вообще превосходитъ. Отсюда мы выводимъ заключеніе, что при огромныхъ температурахъ, имѣющихся въ тѣхъ слояхъ солнца, которые доставляютъ главную часть солнечной лучистой энергіи, всѣ извѣстныя намъ на землѣ вещества могутъ существовать исключительно въ газообразномъ состояніи.

Въ этомъ своемъ заключеніи мы становимся въ прямую оппозицію тому взгляду, который раньше господствовалъ почти безраздѣльно, да и теперь еще, пожалуй, является самымъ распространеннымъ. А именно, считаютъ, что источникомъ солнечнаго лучеиспусканія является облачный слой, состоящій изъ газовъ, сгустившихся въ капельки вслѣдствіе охлаждающаго дѣйствія междузвѣзднаго пространства, подобно тому какъ въ земной атмосферѣ водяной паръ часто сгущается, образуя облака. Вообще эта гипотеза ничего абсурднаго не заключаетъ. Но въ виду существованія огромной температуры въ той самой области солнца, гдѣ берутъ начало его лучи, пишущему эти строки кажется необходимымъ отбросить гипотезу объ „облачной фотосферѣ“. Можно, конечно, предположить, что солнечную фотосферу образуютъ тѣла съ болѣе высокой температурой кипѣнія, чѣмъ всѣ намъ извѣстныя, но это является вполнѣ бездоказательнымъ предположеніемъ, противъ котораго говоритъ все то, что мы знаемъ о составѣ солнца.

Будутъ, однако, настаивать на томъ, что представленію о солнцѣ, состоящемъ исключительно изъ газовъ, противорѣчатъ телескопическія данныя, говорящія намъ о ясно очерченномъ контурѣ и сложной структурѣ солнечнаго диска. Вторую часть аргумента очень легко разбить, напомнивши, что спектро-геліографъ открываетъ въ свѣтѣ, испускаемомъ на солнцѣ водородомъ, еще болѣе сложную структуру. Очевидно, нелѣпо предположить, что водородъ можетъ существовать на солнцѣ въ какомъ-либо состояніи, отличномъ отъ газообразнаго. Замѣчаемую

структуру слѣдуетъ объяснить различіемъ интенсивности лучеиспусканія въ различныхъ массахъ водорода; но это различіе, вѣроятно, происходитъ отъ разницы въ температурахъ. Если такъ дѣло обстоитъ съ водородомъ, то это возможно и для всѣхъ другихъ газовъ.

Что касается ясно очерченнаго контура, то мы сначала должны разсмотрѣть, что слѣдуетъ подъ этимъ понимать. Солнце имѣетъ въ діаметрѣ больше, чѣмъ 1300000 *км.*, и занимаетъ при разсматриваніи съ земли дугу приблизительно въ 1800″. Отсюда видно, что 1″ дуги занимаетъ на солнечномъ дискѣ приблизительно 700 *км.* Никто не станетъ спорить противъ того, что контуръ солнца можетъ быть диффузнымъ на толщину 0,1″; смѣло было бы утверждать, что нѣтъ постепеннаго ослабленія блеска соотвѣтственно даже на 0,5″. Отсюда слѣдуетъ, что мы не можемъ считать „ясно-очерченный" контуръ солнца несовмѣстимымъ съ диффузнымъ краемъ толщиною, по крайней мѣрѣ, въ нѣсколько сотъ километровъ. Можетъ ли это находиться въ согласіи съ гипотезой о солнцѣ, состоящемъ исключительно изъ газовъ?

Всѣ считаютъ, что газы почти совершенно прозрачны, и, въ самомъ дѣлѣ, такъ оно и есть. Но лордъ Рэлей (Rayleigh) въ своей знаменитой теоріи о синевѣ неба показалъ, что молекулы воздуха разсѣиваютъ свѣтъ и такимъ образомъ постепенно ослабляютъ солнечный лучъ. Если намъ извѣстно количество молекулъ, встрѣчающихся по ходу луча, то мы въ состояніи вычислить, какая часть его интенсивности пропадаетъ вслѣдствіе разсѣивательной способности молекулъ воздуха. Фоулъ (Fowle) показалъ, что эти вычисленія вполнѣ согласуются съ наблюденіями, касающимися прозрачности воздуха въ гористыхъ мѣстностяхъ. Разсѣяніе желтаго свѣта на разстояніи одной земной атмосферы равно приблизительно 10%. По отношенію къ лучамъ зеленымъ, голубымъ, синимъ и фіолетовымъ эта потеря еще больше.

Если одна атмосфера пропускаетъ 0,9 первоначальной интенсивности луча, то 2, 4, 8 или 16 атмосферъ должны пропустить соотвѣтственно 0,81, 0,66, 0,43 или 0,18 начальной интенсивности. Если бы наша атмосфера имѣла равномѣрную плотность и притомъ равную плотности воздуха на уровнѣ моря, то ея высота равнялась бы приблизительно только 9 *км.* Отсюда легко видѣть, что въ прямомъ лучѣ послѣ прохожденія его черезъ газовый слой толщиною въ 1000 *км.*, при атмосферныхъ давленіи и температурѣ, не останется почти желтаго свѣта. Принимая во вниманіе высокую температуру солнца, можно съ увѣренностью сдѣлать заключеніе, что глубина газоваго слоя солнца, замѣтнымъ образомъ участвующаго въ лучеиспусканіи, не больше 5000 *км.* Въ центрѣ видимаго диска солнца это разстояніе представляетъ собою вертикальную линію, совпадающую съ радіусомъ; но на краю солнца, гдѣ лучъ, видимый съ земли, имѣетъ наклонное направленіе къ поверхности солнца и потому совершаетъ весьма длинный путь въ наружныхъ слояхъ, глубина по радіусу въ 100 *км.* можетъ быть уже достаточной, чтобы благодаря разсѣянію потушить лучъ. Такимъ образомъ, мы можемъ имѣть, повидимому, отчетливый контуръ и при томъ предположеніи, что солнце состоитъ исключительно изъ газовъ.

Противъ гипотезы о солнцѣ, состоящемъ исключительно изъ газовъ, выдвигается иногда другое возраженіе: указываютъ на то, что газы даютъ скорѣе линейные, чѣмъ сплошные спектры. Но, какъ указано выше, линіи при увеличеніи давленія газа расширяются; то же происходитъ при увеличеніи толщины газа, служащаго источникомъ свѣта. Едва ли можно сомнѣваться въ томъ, что слой раскаленнаго газа, толщиною въ нѣсколько тысячъ километровъ, при давленіи, даже не превосходящемъ атмосфернаго, долженъ давать вполнѣ сплошной спектръ. Это должно быть такъ тѣмъ болѣе, что, повидимому, давленіе въ нижнихъ частяхъ слоя, черезъ который проходитъ свѣтъ, равно нѣсколькимъ атмосферамъ.

Принимая гипотезу о чисто газовомъ составѣ солнца въ томъ видѣ, какъ это было описано выше, мы должны вкратцѣ отмѣтить, насколько хорошо она согласуется съ явленіями измѣненія яркости, замѣчаемыми нами на солнечномъ дискѣ. Уже при наблюденіи невооруженнымъ глазомъ, а еще точнѣе при помощи спектроболометра можно убѣдиться, что солнечный дискъ отличается меньшей яркостью по краямъ, чѣмъ въ центрѣ. Этотъ контрастъ въ яркости между центромъ и краями очень великъ для фіолетовыхъ и ультра-фіолетовыхъ лучей и постепенно уменьшается по мѣрѣ убыванія преломляемости лучей; онъ очень малъ для лучей красныхъ и инфра-красныхъ. Добавимъ еще, что контрастъ для лучей съ какой-угодно длиной волны очень непостояненъ, измѣняясь каждый день и каждый годъ. Неправильныя колебанія происходятъ въ теченіе періодовъ въ нѣсколько дней. Контрастъ достигаетъ большей величины въ тѣ годы, когда достигаютъ своего максимума солнечныя пятна и другія проявленія солнечной дѣятельности. Въ связи съ этими измѣненіями въ контрастѣ наблюдаются еще измѣненія въ интенсивности солнечнаго лучеиспусканія. Если обратить вниманіе только на измѣненія, происходящія въ теченіе короткихъ періодовъ времени, то можно убѣдиться въ томъ, что солнечное лучеиспусканіе в о з р а с т а е т ъ, когда контрастъ у б ы в а е т ъ. Но, какъ это ни странно, во время максимума солнечныхъ пятенъ, когда контрастъ в о з р а с т а е т ъ, лучеиспусканіе в о з р а с т а е т ъ. Эти колебанія интенсивности солнечнаго лучеиспусканія доходятъ до $10^0/_0$, но рѣдко бываютъ больше $3 - 5^0/_0$.

Солнечные лучи, какъ мы уже говорили, берутъ начало въ самыхъ различныхъ глубинахъ солнечнаго вещества, а потому источники этихъ лучей имѣютъ неодинаковую температуру. Когда мы смотримъ на центръ солнечнаго диска, наши глаза обращены на болѣе глубокіе и болѣе раскаленные источники свѣта, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда мы смотримъ на края. Естественно поэтому, что центральная часть диска болѣе ярка, чѣмъ периферическія ея части. Это явленіе гораздо яснѣе выражено для фіолетовыхъ и ультра-фіолетовыхъ лучей, чѣмъ для красныхъ и инфра-красныхъ. Послѣднее сразу станетъ понятнымъ, если при помощи формулы В и н а - П л а н к а вычислить интенсивность лучеиспусканія при длинахъ волнъ въ 0,4 и 0,8 микрона и при температурѣ въ 6000° и 7000°. Повышеніе интенсивности, сопутствующее повышенію температуры, происходитъ гораздо быстрѣе для короткихъ волнъ, чѣмъ для болѣе длинныхъ. Такимъ образомъ, когда взоръ нашъ обра-

щенъ на периферію солнца, мы видимъ болѣе поверхностные и менѣе раскаленные источники свѣта, чѣмъ при взглядѣ на центръ. Однако, нужно принять во вниманіе еще и другое обстоятельство, а именно препятствіе для прохожденія свѣта, представляемое наружными оболочками солнца, какъ, напримѣръ, короной, содержащей, можетъ быть, частицы твердаго вещества въ весьма разсѣянномъ состояніи. Подобные слои должны представлять большее препятствіе для лучей, идущихъ съ периферіи диска, чѣмъ для лучей, идущихъ отъ центральныхъ частей, потому что лучи съ периферіи должны пройти болѣе длинный путь. Это опять-таки способствуетъ появленію контраста между яркостью центра и периферіи, но здѣсь причина контраста отличается отъ указанной выше.

Теперь предположимъ, что общая активность солнца увеличилась, какъ это, напримѣръ, бываетъ во время максимума солнечныхъ пятенъ. На поверхность солнца быстрѣе будутъ передвигаться новыя раскаленныя вещества. Въ это время мы, такимъ образомъ, будемъ видѣть болѣе раскаленный источникъ свѣта, чѣмъ во время минимума солнечныхъ пятенъ, когда передвиженіе происходитъ менѣе быстро. Такимъ образомъ, интенсивность солнечнаго лучеиспусканія во время максимума солнечныхъ пятенъ увеличится; а вмѣстѣ съ тѣмъ увеличится контрастъ между центромъ и периферіей. Ибо, если бы температура солнца равнялась нулю, контрастъ также равнялся бы нулю; чѣмъ выше температура, тѣмъ больше и контрастъ. Такимъ путемъ мы объясняемъ колебанія солнечнаго испусканія, обладающія длиннымъ періодомъ.

Разсмотримъ теперь случай увеличенія непрозрачности наружныхъ оболочекъ солнца. Въ этомъ случаѣ произойдетъ уменьшеніе интенсивности всѣхъ лучей, но въ особенности лучей, идущихъ съ периферіи солнечнаго диска и совершающихъ поэтому болѣе длинный путь въ задерживающей свѣтъ средѣ. Слѣдовательно, съ увеличеніемъ непрозрачности наружныхъ оболочекъ интенсивность лучеиспусканія падаетъ, а контрастъ увеличивается. Такимъ путемъ мы можемъ объяснить колебанія солнечнаго лучеиспусканія, обладающія короткимъ періодомъ.

Такъ какъ газы, состоящіе изъ различныхъ химическихъ элементовъ, обладаютъ и различной плотностью, которая, въ общемъ, варіируетъ соотвѣтственно атомнымъ вѣсамъ, то слѣдуетъ ожидать, что въ солнцѣ, состоящемъ изъ газовъ, вещества съ болѣе низкимъ атомнымъ вѣсомъ распространятся до болѣе высокаго уровня. Полнаго подраздѣленія элементовъ по слоямъ врядъ ли можно ожидать, такъ какъ конвекціонное дѣйствіе, обнаруживающееся въ солнечныхъ пятнахъ, протуберанцахъ и другихъ солнечныхъ явленіяхъ, должно постоянно перемѣшивать имѣющіе тенденцію къ образованію слои. Но, въ общемъ, тяжелые элементы должны стремиться къ болѣе низкимъ уровнямъ. Что въ дѣйствительности такъ оно и есть, объ этомъ свидѣтельствуетъ вышеприведенная таблица. Элементы съ самымъ высокимъ атомнымъ вѣсомъ не представлены въ солнечномъ спектрѣ, потому что, какъ можно предположить, они лежатъ на такой глубинѣ,

что лучи, идущіе отъ нихъ, не достигаютъ насъ вслѣдствіе разсѣянія. Элементы съ меньшимъ, но все-таки высокимъ атомнымъ вѣсомъ представлены слабыми спектральными линіями. Это представляется естественнымъ, если предположить, что эти элементы находятся на такой глубинѣ, что ихъ температура чуть ниже, чѣмъ средняя температура источника, дающаго сплошной спектръ, на которомъ они образуютъ линіи поглощенія. По мѣрѣ того, какъ элементы становятся болѣе легкими, а уровень ихъ распространенія — такъ можно думать — болѣе высокимъ, линіи поглощенія становятся все рѣзче выраженными *). Гипотеза, согласно которой газы въ солнцѣ расположены на различныхъ уровняхъ, была недавно блестящимъ образомъ подтверждена, а детали ея удивительно ясно и точно изложены Ст. Джономъ въ его изслѣдованіи о движеніи газовъ вблизи солнечныхъ пятенъ и въ его анализѣ спектровъ, полученныхъ Митчелемъ (Mitchell) во время затменія 1905 г.

Фактъ, могущій говорить въ пользу нетвердаго состоянія солнца (онъ не доказываетъ, что оно состоитъ только изъ газовъ, но онъ вполнѣ гармонируетъ съ этой точкой зрѣнія), состоитъ въ томъ, что скорость вращенія солнца неодинакова на экваторѣ и на полюсахъ, а также на различныхъ уровняхъ солнечнаго вещества. Вращеніе солнца впервые было обнаружено путемъ наблюденій за движеніемъ пятенъ на дискѣ солнца, но въ настоящее время оно болѣе точно и подробно изучено благодаря спектроскопическимъ наблюденіямъ надъ предшествующимъ и послѣдующимъ краями солнца.

Было найдено, что полный періодъ вращенія солнца колеблется приблизительно отъ 25 до 35 дней, смотря по тому, за какимъ веществомъ и за какой широтой на солнцѣ мы слѣдимъ. Водородъ и другіе элементы, находящіеся на высокомъ уровнѣ, вращаются съ наибольшей скоростью и притомъ безъ большихъ разницъ въ скорости отъ экватора до полюса; а между тѣмъ элементы съ большимъ атомнымъ вѣсомъ, расположенные на низкихъ уровняхъ, не только вращаются медленнѣе, но, кромѣ того, періодъ ихъ вращенія сильно увеличивается по мѣрѣ приближенія къ большимъ солнечнымъ широтамъ. Причины этихъ явленій непонятны.

Пятна, наблюдаемыя на солнцѣ, составляютъ самую поразительную его особенность. Они достигаютъ иногда столь большой величины, что въ центральную ихъ часть, носящую названіе „umbra", можно погрузить земной шаръ, не выполняя ее; болѣе же слабая точка, находящаяся на периферіи пятна, такъ называемая „penumbra", нерѣдко имѣетъ діаметръ, въ нѣсколько разъ большій, чѣмъ діаметръ центральной части. Солнечныя пятна представляются намъ темными, такъ какъ они холоднѣе окружающихъ ихъ частей. Послѣднее доказывается цѣлымъ рядомъ фактовъ, — главнымъ образомъ, видоизмѣне-

*) Гелій составляетъ въ этомъ отношеніи замѣчательное исключеніе. Извѣстно изъ наблюденій надъ затменіями, что гелій встрѣчается на высокомъ уровнѣ (это подтверждается также его атомнымъ вѣсомъ), и между тѣмъ въ спектрѣ солнца его линіи поглощенія очень слабо выражены, если только онѣ замѣтны.

ніемъ спектральныхъ линій въ пятнахъ по сравненію съ фотосферой, а также и тѣмъ, что въ спектрахъ солнечныхъ пятенъ встрѣчаются линіи различныхъ соединеній магнія и титана, которыя, очевидно, не могутъ образоваться при той температурѣ, которая имѣется на остальной поверхности солнца. Въ солнечныхъ пятнахъ обнаруживается вращеніе, а также выбрасываніе ниже лежащихъ газовъ, сопровождающееся нисходящими токами водорода и другихъ газовъ высокаго уровня. Гэль (Hale) нашелъ, что пятна сопровождаются сильными магнитными полями. Два сосѣднихъ пятна представляютъ изъ себя вообще магнитныя поля противоположной полярности. Въ рядѣ красивыхъ опытовъ съ вращеніемъ гибкихъ свертковъ металлическихъ нитей въ лохани съ водой, поверхъ которой находился дымъ, Гэль получилъ подобіе многихъ явленій, наблюдающихся въ солнечныхъ пятнахъ. Такимъ путемъ онъ показалъ, что существованіе пятенъ въ видѣ паръ противоположной магнитной полярности, а также появленіе теченій въ водородѣ, лежащемъ поверхъ пятенъ, могутъ, по всей вѣроятности, быть объяснены гидродинамическими аналогіями. Мы должны, повидимому, смотрѣть на солнечныя пятна, какъ на вихри, похожіе на смерчи. Въ наружныхъ частяхъ смерчей, какъ извѣстно, происходитъ движеніе снизу вверхъ, а во внутреннихъ — сверху внизъ. При вихреобразномъ движеніи вещества появляется магнитное поле, какъ въ опытѣ Роуленда (Rowland) съ вращеніемъ электрическихъ зарядовъ. Охлажденіе въ пятнахъ объясняется расширеніемъ газовъ, связаннымъ съ ихъ выдѣленіемъ.

Очень большой интересъ всегда возбуждала хорошо извѣстная неправильная періодичность появленія солнечныхъ пятенъ, открытая Швабе (Schwabe) около семидесяти пяти лѣтъ тому назадъ, а также тѣсно связанное съ этой періодичностью колебаніе земного магнитнаго поля. Новѣйшія изслѣдованія Шустера (Schuster) и Турнера (Turner), повидимому, бросаютъ новый свѣтъ на эту сложную періодичность и сводятъ ее къ комбинаціи нѣсколькихъ періодичностей, продолжительность которыхъ есть кратное $33^1/_3$ года. Турнеръ того мнѣнія, что эта періодичность, хотя въ общемъ и сохраняется, но иногда нарушается вслѣдствіе космическихъ вліяній. Онъ высказываетъ гипотезу, что солнечныя пятна находятся подъ комбинированнымъ вліяніемъ планетъ и метеоровъ. Впрочемъ, пока еще нельзя сказать, что существуетъ какое-либо всѣми принятое объясненіе какъ причины солнечныхъ пятенъ, такъ и связи, несомнѣнно существующей между появленіемъ пятенъ и земнымъ магнетизмомъ.

Спектрогеліографъ красиво показываетъ рельефную структуру водорода, находящагося вблизи солнечныхъ пятенъ. Мы видимъ здѣсь долины, высоты, а также образованія въ видѣ пышныхъ султановъ, которые, когда они переходятъ за край солнца, хорошо извѣстны подъ названіемъ протуберанцевъ. Эти структурныя детали на лучшихъ фотографическихъ снимкахъ выдаются почти съ такой же ясностью, какъ и структурныя детали луны, и рельефное изображеніе ихъ можетъ быть хорошо наблюдаемо при помощи стереоскопа.

Мы вышли бы изъ рамокъ настоящей краткой статьи, если бы стали разсматривать вліяніе солнца на поддерживаніе температуры

земли и на способствованіе росту растеній на ней; мы не станемъ также сравнивать солнце съ другими звѣздами и подвергать обсужденію вопросъ, насколько вся астрономическая наука зависитъ отъ изслѣдованія солнца. Въ послѣдующемъ мы можемъ только вкратцѣ поговорить объ огромномъ количествѣ энергіи, доставляемой солнцемъ, а также объ ея вѣроятныхъ источникахъ и судьбѣ, повидимому, ее ожидающей.

Изъ многочисленныхъ изслѣдованій, произведенныхъ въ Смитсоновомъ Институтѣ (Smithsonian Institution), слѣдуетъ, что средняя интенсивность солнечнаго лучеиспусканія при среднемъ разстояніи солнца отъ земли равна 1,93 калоріи на квадратный сантиметръ въ теченіе 1 минуты. Другими словами, если представить себѣ слой льда толщиною въ 130 метровъ, расположенный въ видѣ сферы, діаметръ которой будетъ равняться діаметру земной орбиты, то солнце, помѣщенное въ центръ этой сферы, растопитъ его своими лучами въ теченіе одного года. Мы можемъ это выразить иначе, если скажемъ, что энергія солнечнаго лучеиспусканія за одинъ годъ равна энергіи, получаемой отъ сгоранія 4×10^{26} *кгр.* антрацита.

Высказаны были различныя предположенія объ источникѣ этой энергіи. Между прочимъ, указывали на паденіе на солнце метеоритовъ, на сжиманіе солнца подъ вліяніемъ собственнаго тяготѣнія, а въ самое послѣднее время — на освобожденіе внутриатомной энергіи, какъ, напримѣръ, при превращеніи радія въ гелій. Изъ этихъ предположеній первое давно уже считается неподходящимъ. Второе, предложенное Гельмгольцемъ (Helmholtz), могло бы, пожалуй, удовлетворять требованіямъ настоящаго времени, но оно несовмѣстимо съ геологическими данными. Дѣло въ томъ, что для поддержанія температуры, достаточной для сохраненія жизни на землѣ, нужно, чтобы земля получала приблизительно то же количество лучистой энергіи солнца, что и въ настоящее время; поэтому періодъ существованія солнечнаго лучеиспусканія равенъ, по меньшей мѣрѣ, періоду существованія жизни на землѣ. Ученые все болѣе склонны предполагать, что со времени образованія древнѣйшихъ геологическихъ пластовъ, въ которыхъ имѣются признаки существованія жизни, прошло около милліарда лѣтъ. А между тѣмъ вычисленіе показываетъ, что, если бы лучеиспусканіе поддерживалось только сжатіемъ солнца, то періодъ существованія солнечнаго лучеиспусканія, достаточнаго для поддержанія жизни на землѣ, не могъ бы быть больше пятидесяти милліоновъ лѣтъ. Можно, пожалуй, предположить, что земля была раньше ближе къ солнцу и постепенно отъ него удалялась. При этомъ предположеніи только-что указанный періодъ имѣлъ бы большую продолжительность. Но со времени открытія радія и установленія того факта, что иногда утилизируется большой запасъ внутриатомной энергіи, существуетъ тенденція приписывать происхожденіе большей части солнечной энергіи внутриатомнымъ источникамъ. Противъ этого не можетъ служить особеннымъ возраженіемъ то, что солнечный спектръ не указываетъ на существованіе радія, такъ какъ его атомный вѣсъ столь великъ, что, въ случаѣ его существованія на солнцѣ, онъ долженъ занимать очень низкій уровень. Кромѣ того, возможно, что дру-

гіе элементы, кромѣ радія, распадаются въ данномъ случаѣ подобно послѣднему, выдѣляя теплоту.

Какъ бы долго солнце ни расточало свою энергію, выдѣляя ее во внѣ, все-таки, очевидно, долженъ прійти этому конецъ. Вся энергія солнечнаго лучеиспусканія, кромѣ, приблизительно, стомилліонной ея части, сразу же покидаетъ предѣлы солнечной системы. Изъ той же небольшой части энергіи, которая идетъ на согрѣваніе планетъ, въ дѣйствительности ничего ими не удерживается. Для химическихъ процессовъ, подобныхъ происходящимъ при ростѣ растеній и т. п., въ концѣ концовъ, установилось приблизительное или полное состояніе равновѣсія, при которомъ они выдѣляютъ столько же теплоты, сколько поглощаютъ. Земля получаетъ теплоту, главнымъ образомъ, отъ солнца; здѣсь установилось практически состояніе равновѣсія, при которомъ количество энергіи испускаемыхъ землею въ пространство лучей съ большой длиной волны очень близко подходитъ къ количеству энергіи, поглощаемой этой планетой изъ солнечнаго лучеиспусканія. То же, вѣроятно, относится и къ другимъ планетамъ. Отсюда, слѣдуетъ, что практически никакая часть энергіи солнечнаго лучеиспусканія не удерживается въ предѣлахъ солнечной системы. Правда, изъ мірового пространства, обнимающаго собою всѣ звѣзды и все остальное, что въ немъ можетъ заключаться, солнце получаетъ небольшое количество лучистой энергіи въ восполненіе своихъ тратъ. Но изъ того факта, что луна въ теченіе короткаго періода полнаго луннаго затменія охлаждается отъ температуры, близкой къ точкѣ кипѣнія воды, до столь низкой температуры, при которой измѣреніе не показываетъ и слѣдовъ лучеиспусканія, слѣдуетъ съ очевидностью, что притокъ лучистой энергіи изъ міроваго пространства ничтоженъ по сравненію съ лучеиспусканіемъ солнца.

Отсюда явствуетъ, что солнце отдаетъ большое количество энергіи, мало получая взамѣнъ. То же, вѣроятно, относится и къ другимъ звѣздамъ. Время отъ времени могутъ происходить столкновенія между звѣздами или близкія встрѣчи между ними; при этомъ часть ихъ энергіи движенія должна перейти въ теплоту. Но образованіе такого новаго запаса теплоты можетъ только отсрочить неизбѣжный конецъ, не останавливая имѣющаго всеобщее значеніе перехода энергіи отъ нагрѣтыхъ тѣлъ въ пространство по всѣмъ направленіямъ. Куда уходитъ эта лучистая энергія? Можемъ ли мы себѣ представить, что міровое пространство простирается въ безконечность, и что лучи распространяются по все болѣе обширнымъ сферамъ также въ безконечность? Кажется вѣроятнымъ, что путь, совершаемый солнечными лучами, не безконеченъ. Повидимому, міровое пространство заключаетъ извѣстное количество матеріи, состоящей отчасти, можетъ быть, изъ газовъ, а отчасти изъ твердыхъ частицъ. Въ какомъ бы разсѣянномъ состояніи ни находилась эта матерія, все-таки она мало-по-малу поглощаетъ лучи свѣта, такъ что къ концу пути, совершаемаго лучемъ, можетъ быть, въ теченіе десятковъ тысячъ лѣтъ, интенсивность его должна стать равной нулю.

Ясно, что конечное состояніе будетъ достигнуто тогда, когда, благодаря столкновеніямъ и близкимъ встрѣчамъ, механическая энер-

гія движенія всѣхъ звѣздъ превратится въ теплоту, а послѣдняя, благодаря лучеиспусканію и поглощенію лучей, разсѣется въ пространствѣ и во всей вселенной установится одинаково низкая температура. Понятно, что это состояніе наступитъ черезъ почти безконечно удаленное отъ насъ время. Многія звѣзды, можетъ быть, никогда снова не загорятся благодаря столкновеніямъ, а станутъ холодными и темными задолго до того, какъ будетъ достигнуто описанное конечное состояніе. У насъ нѣтъ основанія предполагать, что наше солнце не будетъ одной изъ этихъ звѣздъ.

О положеніи точки восхода солнца и его меридіанальной высотѣ въ связи съ долготой.

П. Д. Яковлева.

При изученіи вопроса о видимомъ движеніи солнца является весьма полезнымъ и интереснымъ разобрать съ учащимися нѣсколько обстоятельнѣе картину ежедневнаго движенія солнца на данной широтѣ въ теченіе года. Для этого нужно показать имъ: 1) какъ зависитъ азимутъ точки восхода солнца отъ долготы его, отъ широты мѣста и наклона земной оси къ плоскости эклиптики, и 2) въ какой зависимости находится меридіанальная высота солнца отъ его долготы.

I. Установленіе зависимости между азимутомъ точки восхода солнца, его долготой, широтой мѣста и наклономъ земной оси къ плоскости эклиптики.

Формула, выражающая связь между азимутомъ точки восхода солнца (A), склоненіемъ (δ) и широтой мѣста (φ), дается въ курсахъ космографіи и имѣетъ такой видъ:

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\ ^{*}). \qquad (1)$$

Мы считаемъ небезполезнымъ дать здѣсь выводъ этой формулы. Это, съ одной стороны, придастъ большую цѣльность нашей статьѣ, а съ другой — представитъ нѣкоторое удобство для того читателя, у котораго не случится подъ рукой сочиненія, содержащаго выводъ формулы (1). Эта формула является результатомъ рѣшенія слѣдующей задачи: опредѣлить азимутъ A ($\angle SOC$, черт. 1) точки восхо-

---

*) См., напримѣръ, Тиссеранъ и Андуайе — «Космографія», стр. 42 и 149. Изд. 1908 г., Брокгауза-Ефрона.

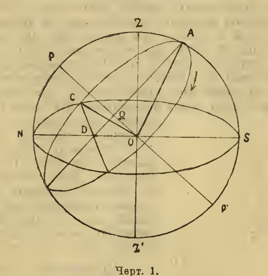
да (C) нѣкотораго свѣтила (въ частности—солнца), зная высоту полюса φ ($\angle POD$) и полярное разстояніе p ($\angle POA$) свѣтила.

Полагая радіусъ небесной сферы равнымъ единицѣ, изъ прямоугольнаго треугольника ΩOA получимъ:

$$O\Omega = \cos POA = \cos p,$$

а изъ прямоугольнаго треугольника ΩOD найдемъ:

$$OD = \frac{O\Omega}{\cos POD} = \frac{\cos p}{\cos \varphi}.$$



Черт. 1.

Но $\cos A = \cos SOC = - OD$; отсюда

$$\cos A = -\frac{\cos p}{\cos \varphi}. \qquad (2)$$

Замѣчая, что полярное разстояніе p связано со склоненіемъ (δ) соотношеніемъ

$$p = 90^\circ - \delta, \qquad (3)$$

мы можемъ придать формулѣ (2) видъ:

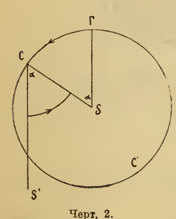
$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}. \qquad (1)$$

Формула (1) выражаетъ зависимость между азимутомъ точки восхода солнца, его склоненіемъ и широтой мѣста. Но наша задача, какъ мы уже упомянули выше, заключается въ установленіи связи между азимутомъ точки восхода солнца, съ одной стороны, и его долготой, широтой мѣста и наклономъ земной оси къ плоскости эклиптики — съ другой. Рѣшимъ эту задачу, замѣтивъ предварительно, что для удобства мы временно введемъ въ разсмотрѣніе полярное разстояніе солнца, отъ котораго далѣе перейдемъ къ склоненію, что и дастъ намъ возможность вывести искомое соотношеніе.

Рѣшимъ теперь слѣдующую задачу: знaя долготу солнца (a) и уголъ наклоненія земной оси къ плоскости эклиптики (ε), найти полярное разстояніе солнца (p).

Обращаясь къ рѣшенію этой задачи, мы должны предварительно замѣтить, что уголъ между прямою, соединяющею центры земли и солнца въ положеніи весенняго равноденствія, и прямою, соединяющею центры земли и солнца при какомъ-либо другомъ положеніи земли, равенъ долготѣ солнца для разсматриваемаго положенія земли.

Это ясно видно изъ черт. 2, гдѣ *ГСГ* изображаетъ орбиту земли, *Г* — положеніе земли въ моментъ весенняго равноденствія и *С* — положеніе земли въ какой-либо другой моментъ. Для земного наблюдателя, въ то время какъ земля передвинется изъ точки *Г* въ точку *С*, солнце перемѣстится въ направленіи, указанномъ стрѣлкой, изъ положенія *S'* въ положеніе *S* на уголъ *S'CS*, равный углу *ГSC*. Но уголъ *S'CS*, т.-е. уголъ между положеніемъ солнца въ моментъ весенняго равноденствія и разсматриваемымъ его положеніемъ, взятый въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки, и есть долгота солнца для даннаго момента.

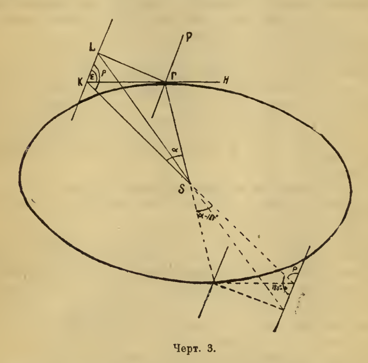


Черт. 2.

Предположимъ теперь, что *Г* (черт. 3) есть положеніе земли на ея орбитѣ въ моментъ весенняго равноденствія, и что *ГР* есть ось земли. Лучъ солнца, проходящій черезъ *Г*, составитъ съ осью *ГР*, какъ извѣстно, прямой уголъ. Обозначимъ черезъ *Т* какое-либо положеніе земли на ея орбитѣ между весеннимъ равноденствіемъ и лѣтнимъ солнцестояніемъ*) и соединимъ точку *S* (солнце) съ точкой *Т*; уголъ *ГST* будетъ равенъ долготѣ солнца (a). Проведемъ черезъ точку *Г* прямую *ГK*, лежащую въ плоскости эклиптики и перпендикулярную къ радіусу *SГ*. Эта прямая пересѣчетъ продолженіе прямой *ST* въ нѣкоторой точкѣ *K* и составитъ съ осью земли уголъ *РГН*, рав-

*) Точка *Т*, не обозначенная на чертежѣ 3, лежитъ на пересѣченіи прямой *SK* съ орбитой.

ный углу наклоненія этой оси къ плоскости эклиптики (ε), что слѣдуетъ изъ простыхъ геометрическихъ соображеній. Проведемъ черезъ K прямую KL, параллельную земной оси, и черезъ точки S и Γ плоскость, перпендикулярную къ прямой KL. Допустимъ, что она пересѣчетъ послѣднюю въ точкѣ L. Соединимъ точки S и Γ съ точкой L. Мы получимъ треугольную пирамиду $S\Gamma KL$, въ которой боковыя грани $SK\Gamma$ и SKL и основаніе $KL\Gamma$ суть прямоугольные треугольники, что слѣдуетъ изъ построенія этихъ треугольниковъ.



Черт. 3.

Разсмотримъ эти треугольники. Замѣчая, что уголъ LKS есть p, мы можемъ написать:

$$KL = KS \cos p \quad (4)$$

и, кромѣ того,

$$K\Gamma = KS \sin \alpha \quad (5)$$

и

$$KL = K\Gamma \cos \varepsilon. \quad (6)$$

Сопоставляя равенства (4) и (6), находимъ:

$$K\Gamma \cos \varepsilon = KS \cos p,$$

а изъ равенства (5) получаемъ:

$$K\Gamma \cos \varepsilon = KS \sin \alpha \cos \varepsilon.$$

Разсматривая совмѣстно два послѣднія равенства, приходимъ къ формулѣ:

$$\cos p = \cos \varepsilon \sin \alpha. \tag{7}$$

Послѣдняя формула и является рѣшеніемъ поставленнаго нами вопроса для того случая, когда земля находится на орбитѣ между весеннимъ равноденствіемъ и лѣтнимъ солнцестояніемъ.

Покажемъ теперь, что соотношеніе (7) между углами p, ε и α существуетъ для всѣхъ остальныхъ положеній земли на ея орбитѣ.

Простой подстановкой убѣждаемся прежде всего, что для положеній: „весеннее равноденствіе", „лѣтнее солнцестояніе", „осеннее равноденствіе" и „зимнее солнцестояніе" формула (7) оправдывается. Дѣйствительно, для указанныхъ положеній α принимаетъ значенія: $0°$, $90°$, $180°$ и $270°$, откуда, соотвѣтственно, $\cos p$ пріобрѣтаетъ значенія: 0, $\cos \varepsilon$, 0 и $-\cos \varepsilon$; этимъ значеніямъ cos'овъ соотвѣтствуютъ слѣдующія значенія угла p: $90°$, ε, $90°$ и $180° - \varepsilon$, что и есть въ дѣйствительности.

Остается разсмотрѣть всѣ промежуточныя положенія земли между лѣтнимъ солнцестояніемъ и весеннимъ равноденствіемъ (по направленію движенія земли по орбитѣ).

Во всѣхъ этихъ положеніяхъ земли такъ же, какъ и раньше, будемъ строить треугольныя пирамиды, вершинами которыхъ попрежнему будетъ служить центръ солнца, а боковыми ребрами: прямая, соединяющая центръ солнца и центръ земли въ разсматриваемомъ положеніи, прямая, соединяющая центръ солнца и центръ земли въ моментъ весенняго равноденствія, или ея продолженіе и, наконецъ, прямая, получаемая въ пересѣченіи двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, одна изъ которыхъ проходитъ черезъ центръ солнца и ось земли въ данномъ ея положеніи, а другая — черезъ равноденственную линію. Ясно, что нѣкоторыя изъ этихъ пирамидъ (на черт. 3 даны только двѣ изъ нихъ) расположатся поверхъ эклиптики (между весеннимъ и осеннимъ равноденствіемъ), а нѣкоторыя снизу (между осеннимъ и весеннимъ равноденствіемъ), при чемъ, какъ это видно изъ черт. 3, роль угла ΓSK, т.-е. угла α, который мы разсматривали въ изслѣдованномъ уже случаѣ, будутъ играть углы $180° - \alpha$, $\alpha - 180°$ и $360° - \alpha$, а роль угла LKS, т.-е. угла p, будутъ играть углы p, $180° - p$ и $180° - p$.

Отсюда слѣдуетъ, что соотношеніе (7) въ этихъ положеніяхъ земли приметъ такой видъ:

$$\cos p = \cos \varepsilon \sin (180° - \alpha),$$

$$\cos (180° - p) = \cos \varepsilon \sin (\alpha - 180°),$$

$$\cos (180° - p) = \cos \varepsilon \sin (360° - \alpha),$$

что, послѣ преобразованій, приводитъ насъ къ прежней формулѣ:

$$\cos p = \cos \varepsilon \sin \alpha. \qquad (7)$$

Такимъ образомъ, мы можемъ считать поставленную нами задачу рѣшенной. Перейдемъ теперь отъ угла p къ углу δ (склоненіе), воспользовавшись соотношеніемъ (3). Подставляя въ формулу (7) вмѣсто угла p его значеніе, найденное изъ соотношенія (3), получимъ:

$$\sin \delta = \cos \varepsilon \sin \alpha. \qquad (8)$$

Чтобы выразить теперь азимутъ точки восхода солнца A черезъ ε, α и φ, нужно будетъ только соединить въ одно соотношеніе формулы (1) и (8). Подставляя изъ формулы (8) въ формулу (1) вмѣсто $\sin \delta$ его значеніе, мы получаемъ соотношеніе:

$$\cos A = -\frac{\cos \varepsilon \sin \alpha}{\cos \varphi}, \qquad (9)$$

которое и поставили себѣ цѣлью найти.

Такъ какъ уголъ наклоненія земной оси $\varepsilon = 66°33'$ (приблизительно), то формулѣ (9) можно придать такой видъ:

$$\cos A = -\frac{\cos 66°33' \sin \alpha}{\cos \varphi}. \qquad (10)$$

Приложимъ формулу (10) къ частнымъ случаямъ, разсмотрѣвъ наиболѣе интересныя положенія солнца для нѣкоторыхъ широтъ. Относительно моментовъ весенняго и осенняго равноденствій замѣтимъ, что вообще для любой широты, за исключеніемъ $\varphi = \pm 90°$, $A = 90°$. Для случая же $\varphi = \pm 90°$ мы должны условиться, какую точку полярнаго горизонта считать за точку юга. Этотъ случай разсмотрѣнъ ниже нѣсколько подробнѣе. Обратимся теперь къ нашимъ примѣрамъ.

1. Каково положеніе точки восхода солнца на экваторѣ во время лѣтняго и зимняго солнцестояній?

Полагая въ формулѣ (10) $\varphi = 0°$ и $\alpha = 90°$, найдемъ:

$$\cos A = -\cos 66°33',$$

откуда

$$A = 113°27'.$$

Такимъ же образомъ, при $\varphi = 0°$ и $\alpha = 270°$ найдемъ:

$$\cos A = \cos 66°33',$$

откуда

$$A = 66°33'.$$

2. Та же задача для тропика Рака ($\varphi = 23°27'$).

Полагая $a = 90°$ и $a = 270°$, получимъ:

$$\cos A = \mp \frac{\cos 66°33'}{\cos 23°27'} = \mp \operatorname{tg} 23°27',$$

откуда

$$A = 115°42' \quad \text{и} \quad A = 64°18' \text{*)}.$$

Рѣшая подобныя же задачи и для другихъ широтъ, мы получаемъ слѣдующія числа, собранныя для удобства въ таблицу:

Мѣста на земномъ шарѣ:	Широты (φ)	Азимуты точки восхода (A)	
		Лѣтнее солнцестояніе	Зимнее солнцестояніе
Сѣверный полярный кругъ	66°33′	180°	0°
Петроградъ	59°57′	142°38′	37°22′
Москва	55°45′	135°	45°
Одесса	46°29′	125°18′	54°42′
Тропикъ Рака	23°27′	115°42′	64°18′
Экваторъ	0°	113°27′	66°33′

Для широтъ, не большихъ 66°33′, т.-е. для мѣстъ, лежащихъ ниже полярнаго круга или на самомъ кругѣ, отношеніе $\frac{\cos \varepsilon}{\cos \varphi} \leqslant 1$, и уравненіе (9) оправдывается для любого значенія a. Но когда $\varphi > 66°33'$, т.-е. когда мѣсто лежитъ выше полярнаго круга, отношеніе $\frac{\cos \varepsilon}{\cos \varphi} > 1$, и уравненіе (9) оправдывается только для тѣхъ значеній a, при которыхъ

$$|\sin a| \leqslant \frac{\cos \varphi}{\cos \varepsilon} \text{**)}. \tag{11}$$

*) Значеніе угла A, какъ и всѣхъ далѣе встрѣчающихся угловъ, даны съ точностью до 0,5′.

**) Знакъ | | обозначаетъ абсолютную величину числа.

Геометрическій смыслъ этого обстоятельства тотъ, что при $|\cos A| > 1$ солнце въ данномъ мѣстѣ или совершенно не восходитъ или совершенно не заходитъ.

Разсмотримъ въ качествѣ примѣра точку на широтѣ въ 75°. Подставляя въ соотношеніе (11) значенія угловъ φ и ε, получимъ: $|\sin \alpha| \leqslant \frac{\cos 75^\circ}{\cos 66^\circ 33'}$. Отсюда $\lg|\sin \alpha| \leqslant \bar{1},81317$. Положимъ

$$|\sin \alpha| = \sin \eta, \tag{12}$$

подчинивъ η условію: $0 \leqslant \eta \leqslant 90^\circ$. Нетрудно видѣть теперь, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant 360^\circ$, какъ это и есть въ дѣйствительности, равенство (12) можетъ имѣть мѣсто лишь при

$$\alpha = 180^\circ k + (-1)^k \eta \quad \text{и} \quad \alpha = 180^\circ (k+1) + (-1)^k \eta, \quad \text{гдѣ} \quad k = 0 \text{ и } 1;$$

это даетъ для α четыре значенія:

$$\alpha = \eta, \quad 180^\circ - \eta, \quad 180 + \eta \quad \text{и} \quad 360^\circ - \eta. \tag{13}$$

Найдя изъ соотношенія $\lg \sin \eta \leqslant \bar{1},81317$, что $\eta \leqslant 40^\circ 34'$, мы изъ формулы (13) получимъ для α соотвѣтственно слѣдующіе предѣлы:

$$\alpha \leqslant 40^\circ 34', \quad \alpha \geqslant 139^\circ 26', \quad \alpha \leqslant 220^\circ 34' \quad \text{и} \quad \alpha \geqslant 319^\circ 26',$$

что можно представить еще въ такой формѣ:

$$319^\circ 26' \leqslant \alpha \leqslant 40^\circ 34',$$

$$139^\circ 26' \leqslant \alpha \leqslant 220^\circ 34'.$$

Эти соотношенія нужно понимать въ томъ смыслѣ, что солнце восходитъ на широтѣ 75° въ періодъ весенняго равноденствія, начиная съ того момента, когда $\alpha = 319^\circ 26'$, до того момента, когда $\alpha = 40^\circ 34'$; далѣе, въ періодъ лѣтняго солнцестоянія, отъ $\alpha = 40^\circ 34'$ до $\alpha = 139^\circ 26'$, оно совершенно не заходитъ; въ періодъ осенняго равноденствія, т. е. отъ $\alpha = 139^\circ 26'$ до $\alpha = 220^\circ 34'$, оно снова восходитъ и заходитъ, и, наконецъ, въ періодъ зимняго солнцестоянія, т. е. отъ $\alpha = 220^\circ 34'$ до $\alpha = 319^\circ 26'$, оно совершенно не восходитъ. Нетрудно найти азимуты точекъ восхода солнца въ тѣ періоды, когда солнце на данной широтѣ (75°) восходитъ, но мы дѣлать этого не будемъ, а обратимся къ точкѣ съ широтой 90°, т. е. къ сѣверному полюсу.

Въ этомъ случаѣ соотношеніе (11) получаетъ видъ $|\sin \alpha| = 0$, т. е. $\sin \alpha = 0$, что для α даетъ два значенія: $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$. Это означаетъ, что солнце восходитъ на полюсѣ только два раза: при $\alpha = 0^\circ$ (весеннее равноденствіе) и при $\alpha = 180^\circ$ (осеннее равноденствіе). Въ промежуткѣ отъ $\alpha = 0^\circ$ до $\alpha = 180^0$ оно совершенно не заходитъ

и въ промежуткѣ отъ $\alpha = 180^\circ$ до $\alpha = 360^\circ$ оно совершенно не восходитъ. За точку юга мы должны принять здѣсь точку, отстоящую на 90° отъ точки восхода, считая по направленію движенія часовой стрѣлки.

II. Установленіе зависимости между меридіанальной высотой солнца и его долготой.

Для этой цѣли намъ послужатъ формулы, выражающія зависимость меридіанальной высоты свѣтила (H) отъ его склоненія и широты мѣста. Формулы эти даются въ космографіи и для случая верхней кульминаціи, которую мы только, очевидно, и должны разсматривать, имѣютъ видъ:

$$H = 90^\circ - \varphi + \delta, \tag{14}$$

$$H = 90^\circ + \varphi - \delta. \tag{15}$$

Формула (14) относится къ случаю кульминаціи къ югу отъ зенита, а формула (15) — къ сѣверу отъ зенита.

Если условиться отсчитывать меридіанальныя высоты отъ 0° до 180°, ведя счетъ отъ точки юга, то вторая изъ написанныхъ формулъ приметъ видъ:

$$H = 180^\circ - (90^\circ + \varphi - \delta),$$

или

$$H = 90^\circ - \varphi + \delta;$$

благодаря этому обѣ формулы объединятся въ одну (14), что чрезвычайно удобно.

Но такъ какъ δ выражается черезъ долготу солнца и черезъ ε съ помощью формулы (8), то, зная долготу солнца, мы можемъ теперь найти и его меридіанальную высоту.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ, иллюстрирующихъ приложеніе формулы (14).

Возьмемъ случаи весенняго и осенняго равноденствій и лѣтняго и зимняго солнцестояній. Полагая въ формулѣ (8) $\alpha = 0^\circ$, 90°, 180° и 270°, найдемъ соотвѣтственныя значенія для δ: 0°, $+23^\circ 27'$, 0° и $-23^\circ 27'$, имѣющія мѣсто для всѣхъ широтъ.

Подставляя въ формулу (14) вмѣсто δ и φ соотвѣтственныя значенія, найдемъ меридіанальныя высоты для слѣдующихъ мѣстъ (числа для удобства собраны въ таблицу):

Мѣста на земномъ шарѣ:	Широты (φ)	Меридіанальныя высоты (H)		
		Лѣтнее солнцестояніе	Весеннее и осеннее равноденствіе	Зимнее солнцестояніе
Сѣверный полюсъ . . .	90°	23°27′	0°	— 23°27′
Сѣверный полярный кругъ	66°33′	46°54′	23°27′	0°
Петроградъ	59°57′	53°30′	30°3′	6°36′
Москва	55°45′	57°42′	34°15′	10°48′
Одесса	46°29′	66°58′	43°31′	20°4′
Тропикъ Рака	23°27′	90°	66°33′	43°6′
Экваторъ	0°	113°27′	90°	66°33′

Новый выводъ разложенія функціи e^x по степенямъ перемѣнной x.

П. Флорова.

При этомъ выводѣ мы будемъ пользоваться тождествомъ

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_{k+n-1}^k = C_{k+n}^{k+1} \quad (n \geqslant 1),$$

гдѣ символъ C_m^i выражаетъ собою число сочетаній изъ m элементовъ по i.

Подчинимъ перемѣнную z условіямъ:

$$0 < z < 1.$$

Пусть n будетъ цѣлое положительное число. Положивъ въ неравенствѣ

$$z^n < 1$$

послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ и сложивъ результаты, получимъ:

$$\frac{z(z^n - 1)}{z - 1} < C_n^1.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на отрицательное число $1-\frac{1}{z}$, найдемъ:

$$z^n > 1 + C_n^1\left(1-\frac{1}{z}\right).$$

Положивъ здѣсь послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ и сложивъ результаты, найдемъ:

$$\frac{z(z^n-1)}{z-1} > C_n^1 + C_{n+1}^2\left(1-\frac{1}{z}\right).$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на отрицательное число $1-\frac{1}{z}$, будемъ имѣть:

$$z^n < 1 + C_n^1\left(1-\frac{1}{z}\right) + C_{n+1}^2\left(1-\frac{1}{z}\right)^2.$$

Повторяя изложенный процессъ вычисленія, мы придемъ къ общему соотношенію:

$$z^n \gtreqless 1 + C_n^1\left(1-\frac{1}{z}\right) + C_{n+1}^2\left(1-\frac{1}{z}\right)^2 + \cdots + C_{n+k-1}^k\left(1+\frac{1}{z}\right)^k,$$

гдѣ k есть любое цѣлое положительное число и гдѣ верхній знакъ неравенства надо удержать при k нечетномъ, а нижній — при k четномъ.

Положивъ въ этомъ соотношеніи

$$1-\frac{1}{z} = -\frac{x}{n} \quad (x > 0), \quad \text{т.-е.} \quad z = \frac{1}{1+\frac{x}{n}},$$

мы преобразуемъ его къ слѣдующему виду:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \gtreqless 1 + \frac{1}{n}C_n^1(-x) + \frac{1}{n^2}C_{n+1}^2(-x)^2 + \cdots + \frac{1}{n^k}C_{n+k-1}^k(-x)^k.$$

Пусть теперь n неограниченно возрастаетъ. При этомъ условіи выраженіе $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$ будетъ стремиться къ предѣлу e^{-x}, гдѣ e есть основаніе натуральныхъ логариѳмовъ. Кромѣ того, изъ тождества

$$\frac{1.2.3\ldots k}{n^k}\,C_{n+k-1}^k = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k-1}{n}\right) \qquad \text{(I)}$$

слѣдуетъ, что при неограниченномъ возрастаніи перемѣнной n предѣлъ лѣвой части его есть единица.

Слѣдовательно,

$$e^{-x} \gtrless 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{(-x)^k}{1.2\ldots k}.$$

Отсюда видно, что неограниченный рядъ

$$1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма любого нечетнаго числа его членовъ больше, чѣмъ e^{-x}, а сумма любого четнаго числа меньше, чѣмъ e^{-x}. Въ виду того, что при неограниченно возрастающемъ k предѣлъ выраженія $\frac{x^k}{1.2.3\ldots k}$ есть нуль, окончательно находимъ, что при всякомъ положительномъ x

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots.$$

Подчинимъ теперь перемѣнную величину z условіямъ:

$$1 < z < a,$$

гдѣ a есть любое число, превосходящее единицу. Пусть n будетъ цѣлое положительное число. Если въ неравенствѣ

$$z^n > 1$$

положимъ послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ и сложимъ результаты, то получимъ:

$$\frac{z(z^n - 1)}{z - 1} > C_n^1.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на положительное число $1 - \frac{1}{z}$, найдемъ:

$$z^n > 1 + C_n^1\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

Положивъ въ этомъ неравенствѣ послѣдовательно $n = 1, 2, \ldots, n$, сложивъ результаты и умноживъ обѣ части найденнаго неравенства на положительное число $\left(1 - \frac{1}{z}\right)$, мы будемъ имѣть:

$$z^n > 1 + C_n^1\left(1 - \frac{1}{z}\right) + C_{n+1}^2\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2.$$

Повторяя изложенный процессъ вычисленія, мы придемъ къ общему соотношенію:

$$z^n > 1 + C_n^1\left(1-\frac{1}{z}\right) + \cdots + C_{n+k-1}^k\left(1-\frac{1}{z}\right)^k, \qquad (1)$$

гдѣ k есть любое цѣлое положительное число.

Обратимся теперь къ неравенству

$$z^n < a^n$$

и положимъ въ немъ послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \ldots, n$. Сложивъ результаты, найдемъ:

$$\frac{z(z^n-1)}{z-1} < \frac{a(a^n-1)}{a-1} < \frac{a^n}{1-\frac{1}{a}}.$$

Умноживъ это неравенство на положительное число $1-\frac{1}{z}$, получимъ:

$$z^n < 1 + a^n\frac{1-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{a}}.$$

Положивъ въ этомъ неравенствѣ послѣдовательно $n = 1, 2, \ldots, n$, сложивъ результаты и умноживъ обѣ части найденнаго неравенства на положительное число $\left(1-\frac{1}{z}\right)$, мы будемъ имѣть:

$$z^n < 1 + C_n^1\left(1-\frac{1}{z}\right) + a^n\left(\frac{1-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{a}}\right)^2.$$

Повторяя изложенный процессъ вычисленія, мы приходимъ къ общему соотношенію:

$$z^n < 1 + C_n^1\left(1-\frac{1}{z}\right) + \cdots + C_{n+k-1}^k\left(1-\frac{1}{z}\right)^k + a^n\left(\frac{1-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{a}}\right)^{k+1}. \qquad (2)$$

Введемъ теперь обозначенія:

$$1-\frac{1}{z} = \frac{x}{n} \quad (n > x), \quad 1-\frac{1}{a} = \frac{b}{b+n} \quad (b > 0).$$

При этихъ обозначеніяхъ неравенства (1) и (2) примутъ видъ:

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} > 1+\frac{1}{n}C_n^1 x+\frac{1}{n^2}C_{n+1}^2 x^2+\cdots+\frac{1}{n^k}C_{n+k-1}^k x^k,$$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} < 1+\frac{1}{n}C_n^1 x+\cdots+\frac{1}{n^k}C_{n+k-1}^k x^k+\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+k+1}\left(\frac{x}{b}\right)^{+1}.$$

Такъ какъ $1 < z < a$, то $0 < x < \dfrac{b}{1+\dfrac{b}{n}}$.

Въ виду этого, неограниченно увеличивая перемѣнную n и принимая во вниманіе тождество (I), мы найдемъ изъ полученныхъ неравенствъ, что при всякомъ конечномъ значеніи перемѣнной k имѣютъ мѣсто неравенства:

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{x^k}{1.2.3\ldots k},$$

$$e^x < 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{x^k}{1.2.3\ldots k}+e^b\left(\frac{x}{b}\right)^{k+1}.$$

Здѣсь b есть совершенно произвольное число, подчиненное только условію $x < b$. При соблюденіи этого условія выраженіе

$$e^b\left(\frac{x}{b}\right)^{k+1},$$

въ случаѣ неограниченнаго возрастанія перемѣнной k, будетъ стремиться къ предѣлу 0. Слѣдовательно, при $x > 0$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots.$$

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Юбилей Миттагъ-Леффлера.

16 марта 1916 года скандинавскіе математики праздновали въ Стокгольмѣ семидесятилѣтній юбилей своего знаменитаго и уважаемаго учителя, М. Г. Миттагъ-Леффлера (M. G. Mittag-Leffler). Множество иностранныхъ ученыхъ приняло участіе въ чествованіи присылкой писемъ и телеграммъ. Ученыя общества, шведскія и заграничныя, отъ всей души поздравляли Миттагъ-Леффлера и выражали ему свое уваженіе за выдающіяся услуги, оказанныя имъ математическимъ наукамъ какъ своими личными замѣчательными работами, такъ и основаніемъ и редактированіемъ журнала „Acta Mathematica". По цѣнности опубликованныхъ въ немъ статей „Acta" принадлежатъ къ числу большихъ международныхъ математическихъ журналовъ.

По случаю юбилея Миттагъ-Леффлеръ и его супруга завѣщали все свое состояніе на дѣло основанія международнаго института чистой математики. Этотъ институтъ начнетъ функціонировать черезъ шесть мѣсяцевъ послѣ смерти щедраго жертвователя. Извѣстіе объ этомъ пожертвованіи будетъ встрѣчено съ радостью всѣми математиками.

Учрежденіе будетъ называться „Makama Mittag-Lefflers mathematiska Stiftelse". Оно будетъ находиться въ Дьюрсгольмѣ близъ Стокгольма, въ великолѣпной усадьбѣ, въ которой нынѣ живутъ супруги Миттагъ-Леффлеръ. Математики, которые имѣли счастье быть принятыми въ этомъ прекрасномъ помѣстьи при возвращеніи съ празднествъ въ честь столѣтія Абеля въ 1902 г. или во время скандинавскихъ конгрессовъ, знакомы съ обширной библіотекой ученаго геометра; въ ней собраны полностью всѣ главные научные журналы.

Учрежденіе имѣетъ своей цѣлью способствовать развитію чистой математики въ скандинавскихъ странахъ и поддерживать внѣ этихъ странъ право на то мѣсто, которое ученые Сѣвера заняли въ общемъ научномъ движеніи. Уставъ предусматриваетъ назначеніе премій по конкурсу, а также стипендій, которыя позволили бы молодымъ математикамъ, мужчинамъ и женщинамъ, находиться при институтѣ Миттагъ-Леффлера и создавать тамъ математическіе труды.

Какъ извѣстно, какъ разъ въ текущемъ 1916 году въ Стокгольмѣ долженъ былъ состояться 6-ой международный конгрессъ математиковъ, подъ высокимъ покровительствомъ шведскаго короля и подъ предсѣдательствомъ Миттагъ-Леффлера. Вслѣдствіе европейской войны конгрессъ состояться не можетъ. Но если бы онъ состоялся, то иностранные делегаты не преминули бы еще разъ выразить уважаемому ученому свои чувства восхищенія и благодарности.

Математическій институтъ супруговъ Миттагъ-Леффлеръ.

Извлеченіе изъ завѣщанія, составленнаго и подписаннаго 16 марта 1916 года Г. Миттагъ-Леффлеромъ и Сигне Миттагъ-Леффлеръ, урожденной Линдфорсъ.

Мы, нижеподписавшіеся, измѣняя наше общее завѣщаніе, составленное нами 6-го января 1883 года, объявляемъ здѣсь нашу послѣднюю волю. Мы завѣщаемъ все наше имущество учрежденію, которое должно носить имя

„Математическій Институтъ супруговъ Миттагъ-Леффлеръ“,

съ тѣмъ, чтобы означенное имущество перешло къ нему послѣ нашей смерти.

Этотъ институтъ долженъ имѣть своимъ назначеніемъ заботы о томъ, чтобы въ четырехъ скандинавскихъ странахъ — Швеціи, Даніи, Финляндіи и Норвегіи, особенно въ первой, чистая математика не только продолжала сохранять свое теперешнее положеніе, но и стремилась улучшить его, а также о томъ, чтобы свѣдѣнія объ успѣхахъ, достигнутыхъ этими странами въ самой отвлеченной области духовной дѣятельности, получили распространеніе за ихъ предѣлами и нашли себѣ достойную оцѣнку.

Мы рѣшительно запрещаемъ руководствоваться при осуществленіи нашей воли какими бы то ни было иными соображеніями, кромѣ указанныхъ. Иначе говоря, въ расчетъ не должны приниматься ни личныя дружескія отношенія, ни желаніе облегчить чье бы то ни было тяжелое положеніе матеріальной поддержкой.

Точно такъ же не должны приниматься во вниманіе требованія или нужды практической жизни, способы провѣрки знаній, политическія мнѣнія и, вообще, всякія соображенія, относящіяся не къ чистой математикѣ, а къ какимъ-либо инымъ наукамъ.

Въ обязанности института входитъ:

1. Тщательно заботиться о сохраненіи и обогащеніи математической библіотеки, принадлежащей нижеподписавшемуся Г. Миттагъ-Леффлеру, со всѣмъ, къ ней относящимся, какъ-то: рукописями, портретами, семейными коллекціями, подарками и со всѣмъ прочимъ.

Библіотека должна и впредь помѣщаться въ каменной виллѣ, расположенной въ Дьюрсгольмѣ на принадлежащемъ намъ земельномъ участкѣ въ кварталѣ № 16, носящемъ названіе Midgard, и не должна быть включена ни въ какое другое собраніе книгъ. Вилла была построена и оборудована съ тою цѣлью, чтобы она служила помѣщеніемъ для библіотеки, и содержить въ себѣ много рабочихъ комнатъ, гдѣ желающимъ будетъ предоставлена возможность въ спокойной обстановкѣ пользоваться всѣми богатствами библіотеки.

Незначительная часть виллы, въ которой въ настоящее время помѣщается наша квартира, послѣ нашей смерти также должна быть отведена подъ библіотеку.

Доступъ въ библіотеку долженъ быть предоставленъ всѣмъ математикамъ, но, во избѣжаніе злоупотребленій, лишь съ разрѣшенія предсѣдателя распоря-

дительнаго комитета или директора института. Уносить книги изъ предѣловъ библіотеки должно быть запрещено, ими можно будетъ пользоваться только въ стѣнахъ библіотеки.

2. Выдавать стипендіи въ цѣляхъ предоставленія возможности дальнѣйшаго образованія, у себя на родинѣ или за-границей, молодымъ людямъ обоего пола, живущимъ въ четырехъ указанныхъ выше странахъ и представившимъ безспорныя доказательства своей способности къ самостоятельнымъ изслѣдованіямъ и открытіямъ въ области чистой математики.

Кромѣ того, работамъ принадлежащимъ уроженцамъ скандинавскихъ странъ и признаннымъ стоящими выше средняго уровня, можетъ быть присуждена награда, состоящая изъ золотой медали того же размѣра и названія, что и малая медаль имени Нобеля, и изъ, насколько возможно, полнаго комплекта журнала „Acta Mathematica“, если только экземпляры послѣдняго окажутся въ наличности; при этомъ всѣ томы журнала должны быть заключены въ роскошные переплеты и носить имя автора премированнаго сочиненія.

3. Присуждать награды за открытія, имѣющія безусловную цѣнность, въ области чистой математики. Эти награды должны назначаться независимо отъ національности лауреата. Послѣдній можетъ быть родомъ изъ какой-угодно страны, и уроженцы скандинавскихъ странъ не должны пользоваться въ этомъ отношеніи никакими привиллегіями. Награда должна присуждаться только за такія открытія, которыя содержатъ въ себѣ идеи, являющіяся серьезнымъ вкладомъ въ науку и двигающія ее впередъ. Во всякомъ случаѣ желательно, чтобы награда присуждалась, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ въ каждые 6 лѣтъ. Награда должна состоять изъ золотой художественно исполненной медали большого размѣра, изъ диплома также художественнаго образца, въ которомъ должны быть изложены научные мотивы, послужившіе основаніемъ для присужденія награды, и, наконецъ, изъ, насколько возможно, полнаго комплекта журнала „Acta Mathematica“, томы котораго должны быть заключены въ прочные роскошные переплеты и носить имя лауреата. Послѣдній долженъ быть приглашенъ лично явиться въ Дьюрсгольмъ для полученія награды; въ виду этого ему будетъ выдана, въ возмѣщеніе путевыхъ издержекъ, соотвѣтствующая сумма, размѣры которой должны быть устанавливаемы для каждаго случая въ отдѣльности. Актъ врученія награды лауреату долженъ происходить въ торжественномъ засѣданіи, устроенномъ въ большомъ залѣ библіотеки.

4. Когда годовой доходъ Института превыситъ нижеуказанную сумму, можно будетъ, кромѣ должности директора, создать еще и другія платныя должности, при чемъ лица, которыя займутъ эти должности, обязаны будутъ заниматься исключительно научной литературной и преподавательской дѣятельностью въ области чистой математики.

Къ предыдущимъ распоряженіямъ добавляются слѣдующія.

А. Въ составъ Распорядительнаго Комитета Института должны войти члены перваго класса (по отдѣлу чистой математики) Шведской Королевской Академіи Наукъ и г.г. профессора Ivar Fredholm и N. E. Nörlund пожизненно; кромѣ того, членомъ Комитета должно быть лицо, занимающее должность директора, о которой будетъ подробнѣе сказано ниже. Комитетъ можетъ также привлечь въ свою среду, на болѣе или менѣе продолжительное время,

какого-нибудь изъ выдающихся шведскихъ математиковъ, который всецѣло раздѣлялъ бы руководящія нами идеи, но не принадлежалъ бы къ первому классу Академіи наукъ. Точно такъ же въ составъ Комитета можетъ входить математикъ, принадлежащій по своему происхожденію къ любой изъ остальныхъ скандинавскихъ странъ и удовлетворяющій тѣмъ же условіямъ.

B. При первой возможности на постъ директора долженъ быть призванъ какой-нибудь выдающійся математикъ, который въ наибольшей степени обладалъ бы качествами, необходимыми для роли научнаго и административнаго руководителя Института; его дѣятельность должна быть сосредоточена исключительно въ предѣлахъ его собственныхъ научныхъ изысканій, но въ то же время она должна быть направлена къ осуществленію цѣлей, которыя ставитъ себѣ Институтъ. Такъ, директоръ Института долженъ будетъ приходить на помощь своими совѣтами всякому, кто только пожелаетъ посвятить себя научнымъ занятіямъ въ Институтѣ, и — въ случаѣ надобности, но только исключительно въ интересахъ науки — читать лекціи ограниченному кружку слушателей, проявившихъ безусловную одаренность и живой интересъ къ этимъ лекціямъ.

Что касается матеріальной стороны дѣла, то въ этомъ отношеніи директоръ Института долженъ находиться въ лучшемъ положеніи, чѣмъ какой-угодно профессоръ въ любомъ изъ университетовъ скандинавскихъ странъ.

Онъ долженъ жить въ Дьюрсгольмѣ и, если возможно, въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ библіотекой. До тѣхъ поръ, пока ему не будетъ предоставлено спеціальное помѣщеніе, ему должны выдаваться квартирныя деньги. Директоръ Института долженъ быть назначенъ, по представленію Распорядительнаго Комитета, Его Величествомъ Королемъ, если, какъ мы осмѣливаемся надѣяться, Его величеству благоугодно будетъ на это согласиться.

. . . .

E. По крайней мѣрѣ, каждые шесть лѣтъ Институтъ долженъ устраивать торжественное засѣданіе. Математики всѣхъ скандинавскихъ странъ должны получить личныя приглашенія принять въ немъ участіе. Мы позволяемъ себѣ думать, что, въ виду тѣхъ серьезныхъ задачъ, которыя взялъ на себя Институтъ по отношенію къ этимъ странамъ, приглашенные не замедлятъ явиться, если только не будутъ задержаны непреодолимыми препятствіями.

Было бы желательно, чтобы торжество было пріурочено къ тому времени, когда въ Стокгольмѣ будетъ засѣдать конгрессъ скандинавскихъ математиковъ. Въ торжественномъ засѣданіи Института долженъ быть опубликованъ докладъ о дѣятельности его за весь періодъ, протекшій со времени предыдущаго торжества. Засѣданіе должно носить торжественный характеръ и выставить въ полномъ свѣтѣ высокое назначеніе математическихъ наукъ, а также задачи, поставленныя себѣ Институтомъ.

Въ заключеніе, я, нижеподписавшійся Г. Миттагъ-Леффлеръ, считаю нужнымъ указать, что образцомъ для учрежденнаго моей женой и мной Института послужилъ Пастеровскій Институтъ въ Парижѣ. Мнѣ кажется, что ни одинъ университетъ и ни одна академія не можетъ въ такой мѣрѣ служить центромъ научныхъ изысканій, какъ Пастеровскій Институтъ. Университеты, помимо своей чисто научной работы, заняты также подготовкой учителей и чиновниковъ, что весьма часто вредно отражается на ихъ главной задачѣ. Что

касается академій, которыя раньше вполнѣ удовлетворяли всѣмъ условіямъ, необходимымъ для разработки чистой науки, то теперь они страдаютъ двумя недостатками: прежде всего, дѣятельность членовъ этихъ академій протекаетъ, большей частью, внѣ ихъ стѣнъ; въ тѣхъ же исключительныхъ случаяхъ, когда это не имѣетъ мѣста, они свободны отъ обязанности руководить другими изслѣдователями, а между тѣмъ именно эта роль руководителя служитъ обычно для ученаго толчкомъ къ самостоятельнымъ изысканіямъ. Нашъ Институтъ не имѣетъ отношенія ни къ какому изъ учрежденій, приспособленныхъ для экспериментальныхъ изысканій; онъ связанъ только со спеціальной, весьма богатой библіотекой, необходимой при изученіи чистой математики.

При добромъ желаніи можно было бы создать въ нашей странѣ институтъ естественныхъ наукъ. Но, въ виду того, что имѣется весьма мало людей, — если не считать спеціалистовъ, — которые понимали бы всю важность и значеніе математическихъ наукъ, я, нижеподписавшійся Г. Миттагъ-Леффлеръ, всегда стремился создать институтъ, подобный тому, который, мы надѣемся, будетъ учрежденъ на основаніи настоящаго завѣщанія.

Настоящее завѣщаніе является плодомъ нашего глубокаго убѣжденія въ томъ, что тотъ народъ, который недостаточно глубоко цѣнитъ математику, никогда не будетъ въ состояніи достичь наивысшихъ ступеней въ дѣлѣ просвѣщенія и, слѣдовательно, никогда не будетъ пользоваться признаніемъ со стороны всего міра, а между тѣмъ только это признаніе обезпечиваетъ народу возможность сохранить свое міровое положеніе и отстаивать свое право на самобытность.

. . . .

Завѣщаніе заканчивается распоряженіями, въ силу которыхъ Институтъ долженъ начать функціонировать лишь послѣ смерти Г. Миттагъ-Леффлера, при чемъ сдѣланы оговорки, содержащія въ себѣ указанія относительно нѣкоторыхъ преимуществъ, предоставляемыхъ пожизненно г-жѣ Сигне Миттагъ-Леффлеръ, а также распоряженія, относящіяся къ управленію имуществомъ, къ нѣсколькимъ мелкимъ пожизненнымъ рентамъ и другимъ суммамъ.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

П. А. Некрасовъ, членъ Совѣта Министра Народнаго Просвѣщенія, докторъ чистой математики. *Средняя школа, математика и научная подготовка учителей.* По поводу доклада Комиссіи при Физико-Математическомъ Отдѣленіи Императорской Академіи Наукъ по обсужденію нѣкоторыхъ вопросовъ, касающихся преподаванія математики въ средней школѣ. Петроградъ, 1916. Стр. 64.

В. И. Лебедевъ. *Очерки по исторіи точныхъ наукъ.* Выпускъ II. «Кто авторъ первыхъ теоремъ геометріи»? Москва, 1916. Стр. 61. Ц. 1 руб.

Одногодичные для подготовленія учителей и учительницъ среднихъ учебныхъ заведеній курсы при Управленіи Казанскаго Учебнаго Округа. Обзоръ дѣятельности за 1911—1915 годы. Выпускъ первый. Казань, 1916. Стр. 279. Ц. 3 рубля. Съ требованіями обращаться въ Управленіе Казанскаго Учебнаго Округа.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей проф. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 351 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{x^3+x^2+8x-1}{9}=\frac{2x^2+x-1}{x-1}.$$

Г. Боевъ (Саратовъ).

№ 352 (6 сер.). Опредѣлить отношеніе площади треугольника $A_1B_1C_1$, вершины котораго A_1, B_1, C_1 суть точки касанія сторонъ даннаго треугольника ABC съ вписаннымъ въ него кругомъ, къ площади даннаго треугольника ABC въ зависимости отъ элементовъ послѣдняго.

С. Каценельбогенъ (Москва).

№ 353 (6 сер.). Дана ариѳметическая прогрессія, первый членъ которой a и разность d суть раціональныя числа. Обозначая черезъ s_n сумму n членовъ этой прогрессіи, доказать, что существуетъ безконечное множество значеній n, для которыхъ s_n принимаетъ цѣлое значеніе, и найти методъ для опредѣленія всѣхъ этихъ значеній n при данныхъ a и d. Разсмотрѣть подробно частный случай, когда $a=\frac{3}{8}$, $d=\frac{5}{18}$.

Н. С. (Одесса).

№ 354 (6 сер.). На діаметрѣ круга AB дана точка C. Построить хорду xy этого круга, параллельную діаметру AB и видимую изъ точки C подъ даннымъ угломъ α.

В.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 301 (6 сер.). *Доказать, что произведеніе*

$$xy(3x+2)(5y+2)$$

есть разность квадратовъ двухъ цѣлыхъ многочленовъ съ цѣлыми коэффиціентами.

(Заимств. изъ «*Supplemento al Periodico di Matematica*»).

Представивъ данное произведеніе въ видѣ $(5xy+2x)(3xy+2y)$, опредѣлимъ выраженія A и B, удовлетворяющія равенствамъ

$$(1)\quad A+B=5xy+2x,\quad A-B=3xy+2y.$$

Разрѣшая эту систему равенствъ относительно A и B обычнымъ способомъ, находимъ, что

$$(2)\quad A=4xy+x+y,\quad B=xy+x-y.$$

Итакъ, многочлены A и B, опредѣляемые формулами (2), удовлетворяютъ тожественно системѣ (1). Перемноживъ равенства (1), получимъ, что

$$A^2-B^2=xy(3x+2)(5y+2),$$

т. е.

$$xy(3x+2)(5y+2)=(4xy+x+y)^2-(xy+x-y)^2.$$

Это тожество и даетъ рѣшеніе предложеннаго вопроса.

В. Поповъ (Валки, Харьковской губ.); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса, Екатерининская, 58.